

Aufgaben zum Repetitorium

Aufgabe 1

Beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 133 ein Teiler von $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Aufgabe 2

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Aufgabe 3

Zeige

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

durch Rückgang auf die ε - n_0 -Definition.

Aufgabe 4

Zeige, dass die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

existieren und gleich sind.

Aufgabe 5

Berechne

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

also den Limes der rekursiv definierten Folge $(a_n)_n$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

Aufgabe 6

Sind die folgenden Reihen konvergent? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

Aufgabe 7

Untersuche auf Konvergenz:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-)^n}$$

Aufgabe 8

Untersuche die durch

$$f_n(x) := nxe^{-nx}$$

definierte Funktionenfolge auf Konvergenz.

Aufgabe 9

Ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1+kx^2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 10

Beweise folgende Behauptung: Sei (f_n) eine auf $D \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergente Folge beschränkter Funktionen. Dann ist auch die Grenzfunktion $f = \lim f_n$ beschränkt und es gibt eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ derart, dass $|f_n(x)| \leq K$ für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$. Man sagt dann, die Folge (f_n) ist gleichmäßig beschränkt.

Aufgabe 11

Die Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Zeige: f ist in jedem irrationalen Punkt $a \in]0, 1[$ stetig.

Aufgabe 12

Die Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Zeige, dass f auf ganz \mathbb{Q} stetig ist.

Aufgabe 13

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und für alle $r \in \mathbb{Q}$ gelte $f(r) = g(r)$. Zeige, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 14

Ist $\sin(x)$ gleichmäßig stetig auf ganz \mathbb{R} ?

Aufgabe 15

Ist \sqrt{x} gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$? Ist \sqrt{x} Lipschitzstetig auf $[0, 1]$?

Aufgabe 16

Zeige, dass der gleichmäßige Limes gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 17

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert in einer Umgebung U von 0. Für ein $a > 1$ gelte $|f(x)| \leq |x|^a$ für alle $x \in U$. Zeige jeweils über Betrachtung des Differenzenquotienten und einer linearen Approximation, dass f in $x_0 := 0$ differenzierbar ist und zwar mit der Ableitung $f'(0) = 0$.

Aufgabe 18

Berechne die Ableitungen folgender Funktionen $f_k : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $f_1(x) = x^{(x^x)}$

2. $f_2(x) = (x^x)^x$

3. $f_3(x) = x^{(x^a)}$

4. $f_4(x) = x^{(a^x)}$

5. $f_5(x) = a^{(x^x)}$

Dabei sei $0 < a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 19

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und der Grenzwert $a := \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existiere. Beweise oder Widerlege:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = a$

2. Ist f zusätzlich beschränkt, so ist $a = 0$.

3. Ist $a = 0$ und f beschränkt, so existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Aufgabe 20

Für $0 \leq a \in \mathbb{R}$ sei $f :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

Zeige, dass f streng monoton wächst.

Aufgabe 21

Zeige, dass die Gleichung

$$e^{\frac{2x}{3}}(2 + x^2) = 1$$

genau eine Lösung in \mathbb{R} hat.

Aufgabe 22

Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei für alle $x \in [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Zeige: f ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

Aufgabe 23

Berechne das Integral

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(e^{2x} - 4) \sinh(x)}$$

Aufgabe 24

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}}$$

Aufgabe 25

Berechne das Integral

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{x^2 + 16} dx$$

Aufgabe 26

Berechne das Integral

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx$$

Aufgabe 27

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$