2.Semester
a) Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher
b) Gewöhnliche Differentialgleichungen (wie immer Forster!)

§1 Stetige Abbildungen auf metrischen Räumen

Sei $\mathbb{X}$ eine Menge

Definitionen:A) Eine **Topologie** auf $\mathbb{X}$ ist ein System $\mathbb{T}$ von Teilmengen von $\mathbb{X}$, für die gilt:

1) $\mathbb{X} \in \mathbb{T}, \quad \varnothing \in \mathbb{T}$
2) $\mathbb{U}, \mathbb{V} \in \mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \mathbb{T}$
3) $\mathbb{U}_i \in \mathbb{T} \quad \forall i$ aus beliebigen Indexmengen $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathbb{U}_i \in \mathbb{T}$

Das Paar ($\mathbb{X}$,$\mathbb{T}$) heißt **topologischer Raum**

$\mathbb{U} \subset \mathbb{X}$ heißt offen $:\Leftrightarrow \mathbb{U} \in \mathbb{T}$
$\mathbb{V} \subset \mathbb{X}$ heißt abgeschlossen$:\Leftrightarrow \mathbb{X} \setminus \mathbb{V}$ offen

B) **Metrische Räume**

Sei $\mathbb{X}$ eine Menge.

Eine Metrik auf $\mathbb{X}$ ist eine Abbildung $d: \begin{cases} \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y) \end{cases}$

s.d. gilt $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$:

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $(d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
(ii) $d(y, x) = d(x, y)$
(iii) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Das Paar ($\mathbb{X}$,d) heißt metrischer Raum

Man schreibt kurz $\mathbb{X}$ statt $(\mathbb{X}, d)$

C) Sei $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm auf** $\mathbb{V}$ ist eine Abbildung

$\| \ \| : \begin{cases} \mathbb{V} \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| \end{cases}$ für die gilt:

(i) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(\mathbb{V}, \| \ \|)$ wo $\mathbb{V}$=$\mathbb{R}$-Vektorraum und $\| \ \| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ ist Norm.

Lemma 1: Sei $(\mathbb{V}, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum. Durch

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

wird eine Metrik auf $\mathbb{V}$ definiert.

Mit anderen Worten: Jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum.

Beweis:

(i) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ und $\left(d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y\right)$

(ii) $d(y,x) = \|y-x\| = |-1|\|y-x\| = \|(-1)(y-x)\| = \|x-y\| = d(x,y)$

(iii) $d(x,z) = \|z-x\| = \|(z-y)+(y-x)\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| =$
$= d(z,y) + d(y,x) = d(x,y) + d(y,z)$

Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^n$: Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ $\qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ ist die **euklidische Norm** auf $\mathbb{R}^n$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$ ist der **euklidische Abstand**.

(2) $\mathbb{R}^n$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ sei

$|x| := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$| \ |$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, sie heißt **Maximumsnorm**.

Gilt: $|x| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\,|x|$

(3) Sei $\mathbb{M}$ eine Menge:

$$\mathbb{B}(\mathbb{M}) := \{f : \mathbb{M} \to \mathbb{R} \ Abb. \mid f \ beschränkt\} = \mathbb{R}\text{-Vektorraum}$$

Sei $\|f\|_{\mathbb{M}} := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{M}\} < \infty$

Behauptung: $\| \ \|_{\mathbb{M}}$ ist eine Norm auf $\mathbb{B}(\mathbb{M})$.

Beweis: (i) und (ii) sind trivial.

Zu (iii):
$$\|f+g\|_{\mathbb{M}} = \sup\{|f(x)+g(x)| \mid x \in \mathbb{M}\}$$
$$\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in \mathbb{M}\}$$
$$\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{M}\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in \mathbb{M}\} =$$
$$= \|f\|_{\mathbb{M}} + \|g\|_{\mathbb{M}}$$

(4) $\mathcal{C}^0([a,b]) = \mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$

In Analysis I hatten wir gesehen, dass durch

$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$

eine Norm auf C([a,b]) definiert wird, die p-Norm.

Sei (𝕏,d) ein metrischer Raum. $a \in \mathbb{X}, r > 0$

Definition: $\mathbb{B}(a,r) := \{x \in \mathbb{X} \,|\, d(a,x) < r\}$ heißt **offene Kugel** um a mit Radius r.

$\mathbb{U} \subset \mathbb{X}$ heißt **Umgebung** von x $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.d. $\mathbb{B}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{U}$.

Beispiele: (i) $(a,b) \subset \mathbb{R}$ offen.

(denn $x \in (a,b), \varepsilon < \min(|x-a|,|b-x|)$

$\Rightarrow \mathbb{B}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \,\|\, y - x| < \varepsilon\} \subset (a,b)$

(ii) $(\mathbb{X},d)$ beliebig, $r > 0, a \in \mathbb{X}, \quad \Rightarrow B(a,r)$ offen

(denn $x \in \mathbb{B}(a,r), \varepsilon := r - d(x,a)$)

$\Rightarrow \mathbb{B}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{B}(a,r)$

Satz 2: Sei $(\mathbb{X},d)$ ein metrischer Raum $\mathbb{T} := \{\text{offene Mengen in } \mathbb{X}\}$
$(\mathbb{X},\mathbb{T})$ ist topologischer Raum.

Beweis: z.Z. (i) $\varnothing, \mathbb{X} \in \mathbb{T}$

(ii) $\mathbb{U},\mathbb{V} \in \mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{U} \cap \mathbb{V} \in \mathbb{T}$

(iii) $\mathbb{U}_i \in \mathbb{T} \quad \forall i \in \mathbb{I} \quad \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{U}_i \in \mathbb{T}$

zu (i) 𝕏 offen, denn 𝕏 ist Umgebung jedes seiner Punkte.

$\varnothing$ offen, denn $\varnothing$ enthält keine Punkte.

Zu (ii) Seien $\mathbb{U},\mathbb{V} \in \mathbb{T}$ Sei $x \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$

z.Z. $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $\mathbb{B}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$

Vorraussetzung $\Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ s.d. $\mathbb{B}(x,\varepsilon_1) \subset U$, $\exists \varepsilon_2 > 0$ s.d. $\mathbb{B}(x,\varepsilon_2) \subset \mathbb{V}$

Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \qquad \Rightarrow \mathbb{B}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$

Zu (iii) Seien $\mathbb{U}_i \in \mathbb{T} \quad \forall i \in \mathbb{I}$, Sei $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{U}_i$

$\exists i_0 \in \mathbb{I}$, s.d. $x \in \mathbb{U}_{i_0}$

da $\mathbb{U}_{i_0}$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, so dass $B(x,\varepsilon) \subseteq \mathbb{U}_{i_0} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{U}_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{U}_i$ offen.

Definition: Ein topologischer Raum $(\mathbb{X},\mathbb{T})$ heißt hausdorffsch, falls es zu je 2 Punkten $x \neq y \in \mathbb{X}$ Umgebungen $\mathbb{U} = \mathbb{U}(x)$ und $\mathbb{V} = \mathbb{V}(y)$ gibt, mit $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \varnothing$.

Satz 3: Jeder metrische Raum $(\mathbb{X},d)$ ist hausdorffsch.

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y, \varepsilon := \frac{1}{2} d(x,y) \Rightarrow \varepsilon > 0$

Seien weiter $\mathbb{U} := \mathbb{B}(x,\varepsilon), \mathbb{V} := \mathbb{B}(y,\varepsilon)$

Behauptung: $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \varnothing$

Beweis: Angenommen $z \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$

$\Rightarrow 2\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ $\lightning$ $\Rightarrow$ Satz

Sei $(\mathbb{X},d)$ metrischer Raum.

Dann ist $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$ offen

Beispiele
(i) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen (denn $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$)

(ii) Seien $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$ abgeschlossen

Insbesondere Quader $Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i\}$ abgeschlossen

Beweis: Sei $(x,y) \notin \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \quad \Rightarrow x \notin \mathbb{A}_1$, oder $x \notin A_2$

Sei $x \notin \mathbb{A}_1$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.d. $\mathbb{B}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{A}_1$

$\Rightarrow \mathbb{B}((x,y),\varepsilon) \subset \mathbb{R}^{m+n} \setminus (\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2)$

$\Rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \setminus (\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2)$ offen $\Rightarrow \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ abgeschlossen.