Satz 4: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 2mal stetig differenzierbar
$x_0 \in \mathbb{U}$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$

a) Ist $H(f)(x_0)$ positiv definit
$\Rightarrow f$ hat in x_0 ein isoliertes, relatives Minimum

Beweis: Taylorformel $\Rightarrow f(x_0+v) = f(x_0) + \frac{1}{2}\langle v, H(f)(x_0)v\rangle + \varphi(v)$ mit $\lim\limits_{v\to 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|^2} = 0$

Zu a) Sei $S :=$ Einheitssphäre $= \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|v\| = 1 \right\}$

Da S kompakt $\Rightarrow$ Die stetige Funktion

$$\alpha : \begin{cases} S \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \alpha(v) := \langle v, H(f)(x_0)v\rangle \end{cases}$$ nimmt auf S ihr Minimum an.

Sei $v_0 \in S$ mit $a := \min\limits_{v \in S} \alpha(v) = \alpha(v_0)$

Behauptung: $\langle v, H(f)(x_0)v\rangle \geq a \cdot \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

Beweis: Klar für $v = 0$, also $v \neq 0$

$$\lambda := \frac{1}{\|v\|}, \quad \eta := \lambda v, \quad \|\eta\| = \lambda \|v\| = 1, \quad \text{d.h.}\ \eta \in S$$

$$a \leq \alpha(\eta) = \langle \eta, H(f)(x_0)\eta\rangle = \lambda^2 \langle v, H(f)(x_0)v\rangle$$
$$= \frac{1}{\|v\|^2}\langle v, H(f)(x_0)v\rangle$$

wegen $\lim\limits_{v\to 0} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|^2} = 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass

$$|\varphi(v)| \leq \frac{a}{4}\|v\|^2 \quad \forall v \text{ mit } \|v\| < \delta \ \star$$

$$\Rightarrow f(x_0+v) = f(x_0) + \frac{1}{2}\langle v, H(f)(x_0)v\rangle + \varphi(v)$$
$$\geq f(x_o) + \underbrace{\frac{a}{2}\|v\|^2}_{\text{Beh.}} - \underbrace{\frac{a}{4}\|v\|^2}_{\star}$$
$$= f(x_0) + \frac{a}{4}\|v\|^2 > f(x_0) \quad \square$$

Beispiel: $f(x,y) = x\log(x+y) - y$ auf $\mathbb{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y > 0\right\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x+y} - 1 = \frac{-y}{x+y}$$

$$\operatorname{grad} f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ und } \log x = -\frac{x}{x} = -1$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x, y) = \left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$$
$$H(f)\left(\frac{1}{e}, 0\right) = \frac{d^2 f}{d(x,y)^2}\left(\frac{1}{e}, 0\right) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte: } e, -e$$
$$\Rightarrow f(x, y) \text{ hat kein lokales Extremum}$$

§6 Implizite Funktionen

Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ differenzierbar
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Annahme: $\Gamma_g := \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{U}$ und es gelte $F(x, g(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in I$

Man sagt: Falls $F(x, g(x)) = 0$, so sagt man die Funktion $g(x)$ wird durch die Gleichung $F(x, g(x)) = 0$ **implizit** gegeben. $g(x)$ heißt **implizite Funktion**.

Kettenregel: (angewendet auf $F(x, g(x)) = 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x) = 0$$

Falls $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \qquad \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$

Beispiel: $g : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^3} \end{cases}$

Setze $y = g(x)$ (zur Abkürzung)

$\sin y = \sqrt{1 - x^3} \qquad \sin^2 y = 1 - x^3$

$$\Rightarrow F(x,y) := \sin^2 y + x^3 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\, y' = 3x^2 + 2\sin y \cdot \cos y \cdot y' = 0$$

$$0 < x < 1 \qquad \Rightarrow 0 < \sqrt{1-x^3} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < y = g(x) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos y > 0, \quad \sin y > 0$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-1+x^3} = \sqrt{x^3}$$

$$g'(x) = y' = \frac{-3x^2}{2\sin y \cdot \cos y} = \frac{-3x^2}{2\sqrt{x^3\left(1-x^3\right)}}$$

Allgemein: Sei $a \in \mathbb{R}^k$, $\quad b \in \mathbb{R}^m$, $\quad r_1 > 0$, $\quad r_2 > 0$

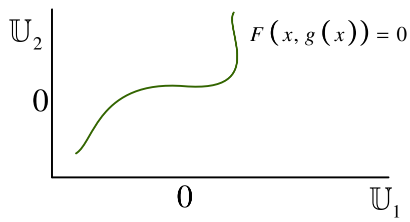
$$\mathbb{U}_1 := B_k(a, r_1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \|x-a\| < r_1 \right\} \subset \mathbb{R}^k$$

$$\mathbb{U}_2 := B_m(b, r_2) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \|y-b\| < r_2 \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

Sei $g : \begin{cases} \mathbb{U}_1 \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$ mit $g(a) = b$ und $g(\mathbb{U}_1) \subset \mathbb{U}_2$

und $F\left(x, g(x)\right) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{U}_1$

Wichtiger Fall: $\quad k = m = 1$



Satz 1: Angenommen:

1) F in (a,b) total differenzierbar

2) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbare Matrix

3) $g : \mathbb{U}_1 \to \mathbb{R}^m$ stetig mit $g(a) = b$

$\Rightarrow$ g in a total differenzierbar und für die Funktionalmatrix gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = \overset{-}{v}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right)$$

Beweis: $Œ(a,b)=(0,0)\in\mathbb{R}^{k+m}$

(Ersetze F und g durch $\tilde{F}(x,y):=F(x+a,y+b)$, $\tilde{g}(x):=g(x+a)-b$)

$$\tilde{F}(0,0)=F(a,b)$$

$$\tilde{g}(0)=g(a)-b=b-b=0$$

$$\tilde{F}=(x,\tilde{g}(x))=F(x+a,g(x+a)-b+b)\equiv 0$$

$$A:=\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\in M(m\times k,\mathbb{R})$$

$$B:=\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\in M(m\times m,\mathbb{R})$$

Nach Voraussetzung $\exists\ B^{-1}$

F in 0 differenzierbar

$$\Leftrightarrow\ F(x,y)=Ax+By+\varphi(x,y)$$

$$\text{wo}\ \ \varphi:\mathbb{U}_1\times\mathbb{U}_2\to\mathbb{R}\ \ \text{mit}\ \ \lim_{(x,y)\to 0}\frac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$$

Da $F(x,g(x))\equiv 0\Rightarrow 0=F(x,g(x))=Ax+Bg(x)+\varphi(x,g(x))$

Da $B^{-1}\ \exists\ \ \Rightarrow \mathrm{g}(\mathrm{x})=-B^{-1}Ax-B^{-1}\varphi(x,g(x))$ ☆

Behauptung 1: $\exists\delta,K\in\mathbb{R},0<\delta<r_1$ und $K>0$, so dass

$$\|g(x)\|\le K\|x\|\qquad\forall x\ \text{mit}\ \|x\|<\delta$$

Setzen $\psi(x):=-B^{-1}\varphi(x,g(x))$

☆ $\Rightarrow g(x)=g(0)-B^{-1}Ax+\psi(x)$

Behauptung 2: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{\|x\|}=0$

Beweis: $\displaystyle 0\le\lim_{x\to 0}\frac{\|\psi(x)\|}{\|x\|}=\lim_{x\to 0}\frac{\|B^{-1}\varphi(x,g(x))\|}{\|x\|}$

$$\le\|B^{-1}\|\lim_{x\to 0}\frac{\|\varphi(x,g(x))\|}{\|x\|}$$

☆☆ $$\frac{\|\varphi(x,g(x))\|}{\|x\|}=(1+K)\frac{\|\varphi(x,g(x))\|}{\|x\|+K\|x\|}\overset{\text{Beh.1}}{\le}(1+K)\frac{\|\varphi(x,g(x))\|}{\|x\|+\|g(x)\|}$$

Aber: $$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\|\varphi(x,y)\|}{\|x\|+\|y\|}=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\|\varphi(x,y)\|}{\|(x,y)\|}=0$$

Da mit $x\to 0$ auch $g(x)\to 0$

Folgt insbesondere $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\|\varphi(x,g(x))\|}{\|x\|+\|g(x)\|}=0$

$$☆☆ \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\left\|\varphi\left(x, g(x)\right)\right\|}{\|x\|} = 0 \qquad \Rightarrow \text{Beh.2}$$

Beweis: (Behauptung 1)

Sei $c_1 := \left\|B^{-1}A\right\|, \quad c_2 := \left\|B^{-1}\right\|$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \quad \Rightarrow \exists \delta_i : 0 < \delta_i < r_i \quad \text{für } i = 1,2 \text{, so dass}$$

$$\frac{\|\varphi(x,y)\|}{\|(x,y)\|} < \frac{1}{2c_2} \quad \forall (x,y) \text{ mit } \|x\| \le \delta_1, \|y\| \le \delta_2$$

$$\Rightarrow \|\varphi(x,y)\| \le \frac{1}{2c_2}\|(x,0)+(0,y)\| \le \frac{1}{2c_2}\left(\|x\|+\|y\|\right)$$

g stetig in $(0,0) \Rightarrow \exists 0 < \delta < \delta_1$, so dass $\|g(x)\| \le \delta_2 \quad \forall x \text{ mit } \|x\| \le \delta$

$$\Rightarrow \forall x \text{ mit } \|x\| \le \delta \text{ ist } \left\|\varphi\left(x, g(x)\right)\right\| \le \frac{1}{2c_2}\left(\|x\| + \|g(x)\|\right) ☆☆☆$$

$$☆ \Rightarrow \|g(x)\| \le c_1\|x\| + c_2\left\|\varphi\left(x, g(x)\right)\right\|$$

$$\overset{☆☆☆}{\le} c_1\|x\| + \frac{1}{2}\left(\|x\| + \|g(x)\|\right) = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\|x\| + \frac{1}{2}\|g(x)\|$$

$$\Rightarrow \|g(x)\| \le \underbrace{2\left(c_1 + \frac{1}{2}\right)}_{=:K}\|x\| = K\|x\| \quad \forall x \text{ mit } \|x\| \le \delta$$