Satz 2: Seien $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar
Sei $(a,b) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ mit

a) $F(a,b) = 0$

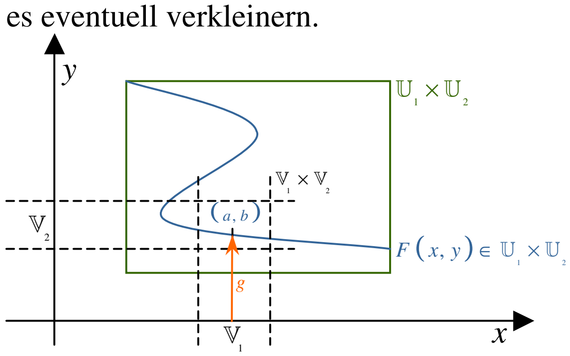
b) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbare Matrix

$\Rightarrow \exists$ offene Umgebungen $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{U}_1$ von a und $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{U}_2$ von b und stetige Abbildung $g : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ mit $F(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{V}_1$

Für jedes $x \in \mathbb{V}_1$ ist $g(x)$ die einzige in $\mathbb{V}_2$ liegende Lösung von $F(x,y) = 0$

Man sagt: Die Abbildung g entsteht durch Auflösung der Gleichung $F(x,y) = 0$ nach y.

Bemerkung: Im Allgemeinen lässt sich $F(x,y) = 0$ nicht in ganz $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ auflösen. Man muss es eventuell verkleinern.



Beweis: Wie in Satz 1 Œ$(a,b) = (0,0)$

Sei wieder $B := \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R})$

$$\text{Sei } G : \begin{cases} \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \to \mathbb{R}^m \\ (x,y) \mapsto G(x,y) := y - B^{-1}F(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \mathbb{1}_m - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = \mathbb{1}_m - B^{-1}B = 0$$

Da $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ stetig in $(0,0)$, $\exists$ Umgebungen $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{U}_1$ und $\mathbb{W}_2 \subset \mathbb{U}_2$ von 0, so dass

$$☆ \quad \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right\| = \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) \right\| < \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{W}_1 \times \mathbb{W}_2$$

Sei $r > 0$, so dass $\mathbb{V}_2 := B_m(0,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \|y\| < r \right\} \subset \mathbb{W}_2$

Da $G(0,0) = 0$ und G stetig, $\exists$ Umgebung $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{W}_1$ von 0, so dass

$$\varepsilon := \sup_{x \in \mathbb{V}_1} \|G(x,0)\| < \frac{r}{2} \quad ☆☆$$

Offenbar: $F(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad G(x,y)=y$ $\star\star\star$

Behauptung 1: Zu jedem $x\in \mathbb{V}_1$ gibt es höchstens ein $y\in \mathbb{V}_2$ mit $F(x,y)=0$

Beweis: Annahme: $F(x,y_1)=0=F(x,y_2)$ mit $y_1,y_2\in \mathbb{V}_2$

$\Rightarrow y_1-y_2=G(x,y_1)-G(x,y_2)$

2. MWS mit $v:=y_1-y_2$ bei festem x

$$y_1-y_2=G(x,y_2+v)-G(x,y_2)\overset{\text{MWS}}{=}\left(\int_0^1\frac{\partial G}{\partial y}(x,y_2+tv)\,dt\right)v$$

$$\Rightarrow \|y_1-y_2\|\le \int_0^1\left\|\frac{\partial G}{\partial y}(x,y+tv)\right\|dt\cdot\|y_1-y_2\|$$

$$\overset{\star}{\le}\frac{1}{2}\|y_1-y_2\| \qquad \Rightarrow y_1=y_2$$

Behauptung 2: Es gibt stetige Abbildung $g:\mathbb{V}_1\to\mathbb{V}_2$ mit

$g(x)=G(x,g(x))$ ($\star\star\star$ liefert den Satz)

Beweis: Setze $g_0(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{V}_1$

und induktiv $g_{\nu+1}(x)=G(x,g_\nu(x)) \quad \forall x\in\mathbb{V}_1$

Insbesondere: $g_1(x)=G(x,0)$

$$\star\star \Rightarrow \|g_1\|_{\mathbb{V}_1}:=\sup_{x\in\mathbb{V}_1}\|g_1(x)\|=\varepsilon<\frac{r}{2}$$

Behauptung: $\|g_{\nu+1}-g_\nu\|_{\mathbb{V}_1}:=\sup\limits_{x\in\mathbb{V}_1}\|g_{\nu+1}(x)-g_\nu(x)\|\le\frac{\varepsilon}{2^\nu}$

Beweis: (Induktion nach ν) IA: $\nu=0$ (s.o.)

IS: Angenommen $\|g_\nu-g_{\nu-1}\|_{\mathbb{V}_1}\le\frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}}$

$$g_{\nu+1}(x)-g_\nu(x)=G(x,g_\nu(x))-G(x,g_{\nu-1}(x))$$

$$\overset{\text{MWS}}{=}\left(\int_0^1\frac{\partial G}{\partial y}(g_{\nu-1}(x)+tv)dt\right)(g_\nu(x)-g_{\nu-1}(x))$$

$$\star \Rightarrow \|g_{\nu+1}(x)-g_\nu(x)\|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|g_\nu(x)-g_{\nu-1}(x)\|\overset{\text{IA}}{\le}\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}}=\frac{\varepsilon}{2^\nu}$$

Mit $g_N:=\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}(g_{\nu+1}-g_\nu)$ folgt aus Behauptung:

$$\|g_N\|_{\mathbb{V}_1}\le\sum_{\nu=0}^{N-1}\|g_{\nu+1}-g_\nu\|_{\mathbb{V}}\overset{\text{Beh}}{\le}\sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{2^\nu}\le 2\varepsilon<r$$

Also $g_N(\mathbb{V}_1)\subset\mathbb{V}_2 \quad \forall N$

Also ist Definition sinnvoll.

Außerdem $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(g_{\nu+1}-g_\nu)$ besitzt Majorante $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^\nu}$

$\Rightarrow$ Sie konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{V}_1$

$\Rightarrow g(x) = \lim\limits_{N\to\infty} g_N(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left(g_{\nu+1}(x) - g_\nu(x)\right)$ ist stetige

Abbildung $g : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{R}^m$ mit $\|g\|_{\mathbb{V}_1} \leq 2\varepsilon < r$, d.h. $g(\mathbb{V}_1) \subseteq \mathbb{V}_2$ ☆☆☆☆ ☆☆☆☆

$\Rightarrow g(x) = \lim\limits_{N\to\infty} g_N(x) = \lim\limits_{N\to\infty} G\left(x, g_{N-1}(x)\right) =$

$= G\left(x, \lim\limits_{N\to\infty} g_N(x)\right) = G\left(x, g(x)\right)$

> **Satz 3:** Voraussetzungen wie in Satz 2
> $\Rightarrow \exists$ Ungebung $\tilde{\mathbb{V}}_1 \subset \mathbb{V}_1$ von a, so dass
> g auf $\tilde{\mathbb{V}}_1$ stetig differenzierbar ist

Beweis: Da $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar und $\det\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|$ stetig

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $\mathbb{U}'$ von (a,b), so dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ invertierbar $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{U}'$

Satz 1 angewendet auf $\left(x, g(x)\right)$ mit x in (kleiner) Umgebung von a

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $\tilde{\mathbb{V}}_1$ von a, so dass g auf $\tilde{\mathbb{V}}_1$ total differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, g(x)\right)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\left(x, g(x)\right) \quad \forall x \in \tilde{\mathbb{V}}_1$$

Aber: Die Einträge der Matrix $\frac{\partial F}{\partial x}\left(x, g(x)\right)$ sind stetig

und die Einträge der Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, g(x)\right)$ sind stetig

$\Rightarrow$ Die Einträge der

$$\text{Matrix}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, g(x)\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, g(x)\right)\right)} \cdot \overset{(\text{Adjungierte Matrix})}{\text{Adj}}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, g(x)\right)\right)$$

$\Rightarrow g$ stetig differenzierbar

Anwendung 1: Höhenlinien

Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$

Definition: Die Kurven $N_f(c) = \left\{(x,y) \in \mathbb{U} \,\middle|\, f(x,y) = c\right\}$ heißen **Höhenlinien (Niveaulinien)** von f.

Falls grad $f \neq 0$, so kann man diese genauer beschreiben.

Annahme: grad $f(a,b) \neq 0, \quad f(a,b) = c$

Wende Satz 2 auf $F(x,y) = f(x,y) - c$ an.

1.Fall: Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, so existieren offene Intervalle

$\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2 \subset \mathbb{R}$ mit $(a,b) \in \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \subset \mathbb{U}$ und $\varphi : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$, so dass

$$N_f(c) \cap (\mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \mid y = \varphi(x)\}$$

2. Fall: Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$, so existieren offene Umgebungen $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2 \subset \mathbb{R}$ mit $(a,b) \in \mathbb{J}_1 \times \mathbb{J}_2 \subset \mathbb{U}$ und $\psi : \mathbb{J}_2 \to \mathbb{J}_1$ stetig differenzierbar, so dass $N_f(c) \cap (\mathbb{J}_1 \times \mathbb{J}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{J}_1 \times \mathbb{J}_2 \mid x = \psi(y)\}$

Anwendung 2: Umkehrfunktion

Seien $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U}_1 \to \mathbb{U}_2$ stetig differenzierbar

Frage:
1) Wann ist f bijektiv?
2) Wenn das der Fall ist, ist dann $f^{-1} : \mathbb{U}_2 \to \mathbb{U}_1$ stetig differenzierbar?

Satz 4: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar

Sei $a \in \mathbb{U},\ b = f(a),\ y = f(x)$

Angenommen: $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ invertierbare Matrix

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ von a und offene Umgebung $\mathbb{V}'$ von b, so dass $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ bijektiv und die Umkehrabbildung $g := f^{-1} : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}$ stetig differenzierbar

Es gilt: $\frac{\partial g}{\partial y}(b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(b))\right)^{-1}$

Beweis: Sei $F : \begin{cases} \mathbb{U} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x,y) \mapsto y - f(x) \end{cases}$

Es ist
a) $F(a,b) = b - f(a) = 0$
b) $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ invertierbar

Satz 2 und 3 $\Rightarrow \exists$ offene Umgebung $\mathbb{V}'$ von b und offene Umgebung $\mathbb{U}' \subset \mathbb{U}$ von a und genau eine stetig differenzierbare Abbildung $g : \mathbb{V}' \to \mathbb{U}'$, so dass

$0 = F(g(y), y) = y - f(g(y)) \quad \forall y \in \mathbb{V}'$

$\Leftrightarrow f(g(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{V}'$

Da f stetig, ist $f^{-1}(\mathbb{V}')$ offen

Sei $\mathbb{W} := \mathbb{U}' \cap f^{-1}(\mathbb{V}')$ offene Umgebung von a

Behauptung: $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}'$ bijektiv

Beweis:
1) z.Z. $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}'$ surjektiv

Sei $y \in \mathbb{V}'$

Sei $x := g(y) \in \mathbb{U}'$

Wegen $f(g(y)) = y \in \mathbb{V}'$ ist $g(y) \in f^{-1}(\mathbb{V}')$

$$\Rightarrow x = g(y) \in \mathbb{U}' \cap f^{-1}(\mathbb{V}') = \mathbb{W}$$

$$f(x) = f(g(y)) = y$$

2) z.Z. $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}'$ injektiv

Ist $f(x_1) = f(x_2) = y$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{W}$

z.Z. $x_1 = x_2$

$$\Rightarrow F(x_1, y) = F(x_2, y)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Funktion g in Satz 2

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Da f bijektiv, ist g die Umkehrabbildung von f

$$\mathbb{1} = \frac{\partial y}{\partial y}(b) = \frac{\partial (f \circ g)}{\partial y}(b) \overset{\text{KR}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(g(b)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(b) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(b))^{-1}$$