Beispiel: $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\to(e^x\cos y, e^x\sin y)\end{cases}$ stetig differenzierbar

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\begin{pmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}\text{invertierbar}\,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=e^x\left(\cos^2 y+\sin^2 y\right)=e^x \quad \neq 0$$

Aber: $f$ nicht global bijektiv, denn $f(x,0)=f(x,2\pi)$

Anwendung 3: Extrema mit Nebenbedingungen

Langrange Multiplikatorenregel:

Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}$ offen

$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}\\ h:\mathbb{U}\to\mathbb{R}\end{array}\right.$ stetig differenzierbar

Sei $M:=\left\{x\in\mathbb{U}\,\middle|\,h(x)=0\right\}$

Sei $a\in M$ mit $\operatorname{grad} h(a)\neq 0$

Angenommen: $f$ besitzt in $a$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum) mit der Nebenbedingung $h=0$
(d.h. $\exists$ Umgebung $\mathbb{V}\subset\mathbb{U}$ von $a$, so dass $f(a)\geq f(x)$
(bzw. $f(a)\leq f(x)$) $\forall x\in\mathbb{V}\cap M$ )
$\Rightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad} f(a)=\lambda\operatorname{grad} h(a)$

$\lambda$ heißt **Langrange-Multiplikator**

Beweis: Œ $\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\neq 0$ (sonst Umnummerierung der Koordinaten)

Zur Abkürzung: Setze $a=(a',a_n)$ wo $a'=(a_1,\dots,a_{n-1})$

Satz 3 $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $\mathbb{V}'\subset\mathbb{R}^{n-1}$ von $a'$
$\exists$ offene Umgebung $\mathbb{V}''\subset\mathbb{R}$ von $a_n$
mit $\mathbb{V}'\times\mathbb{V}''\subset\mathbb{U}$
und stetig differenzierbare Funktionen $g:\mathbb{V}'\to\mathbb{V}''$,
so dass $M\cap(\mathbb{V}'\times\mathbb{V}'')=\left\{x\in\mathbb{V}'\times\mathbb{V}''\,\middle|\,x_n=\left(g(x_1,\dots,x_{n-1})\right)\right\}$

Also: $h\left(x_1,\dots,x_{n-1},g(x_1,\dots,x_{n-1})\right)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{V}'$

Kettenregel: $\Rightarrow$

$$☆\quad 0=\frac{\partial h}{\partial x_i}(a)+\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}(a')\quad\forall i=1,\dots,n-1$$

Betrachte: $F:\begin{cases}\mathbb{V}'\to\mathbb{R}\\ \underbrace{(x')}_{=(x_1,\dots,x_{n-1})}\mapsto f\left(x',g(x')\right)\end{cases}$

$f$ besitzt nach Annahme in $a$ ein lokales Extremum
$\Rightarrow F$ besitzt auf $\mathbb{V}'\subset\mathbb{R}^{n-1}$ in $a'$ ein lokales Extremum

$$\S 5 \text{ Satz } 3 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(a') = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n-1$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(a') = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(a') \star\star$$

$$\text{Sei } \lambda := \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\left(\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\right)^{-1} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\star\star}{=} -\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) =$$

$$= -\lambda\frac{\partial h}{\partial x_i}(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a') \overset{\star}{=} \lambda\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) \qquad \forall i = 1,\ldots,n-1$$

$$\text{und } \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \lambda\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)$$

Zusammengenommen: $\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} h(a)$

Praktische Lösung der Extremalaufgaben

Betrachte das System von $n+1$-Gleichung

$$\star\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda\dfrac{\partial h}{\partial x_i} = 0 & i = 1,\ldots,n \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Langrangesches Gleichungssystem

in der $n+1$ Unbekannten $x_1,\ldots,x_n,\lambda$

(Man erhält★, indem man die partielle Ableitung von $F(x,\lambda) := f(x) + \lambda h(x)$ gleich 0 setzt)

1. Schritt: **Löse**★
Jeder Punkt $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $a_1,\ldots,a_n,\lambda$ löst★,
so dass zusätzlich $\operatorname{grad} h(a) \neq 0$
steht in Verdacht, Stelle eines lokalen Extremums mit Nebenbedingung $h$ zu sein.

2. Schritt: **Prüfe** ob $a$ lokaler Extremalpunkt mit Nebenbedingung $h$ von $f$ ist.
Die einzige Stellen, die außerdem noch Extremalpunkte mit Nebenbedingung $h$ sein können sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\star\star : \begin{cases} h(x) = 0 \\ \operatorname{grad} h(x) = 0 \end{cases}$$

3.Schritt: **Löse**★★ und **überprüfe**, ob die Lösungen Extremalstellen mit Nebenbedingung $h$ von $f$ sind.

Beispiel: Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

also $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$f(x,y) = x \cdot y$

Aufgabe: Bestimme die lokalen Extrema von $f$ auf ganz $M$

$\operatorname{grad} h = (2x, 2y) \neq 0$ auf ganz $M$

Sei $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda h(x, y) = x \cdot y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Langrangesches System:

$$\star \begin{cases} y + 2\lambda x & = \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (I) \\ x + 2\lambda y & = \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (II) \\ x^2 + y^2 - 1 & = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad (III) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} xy + 2\lambda x^2 = 0 & (I \cdot x) \\ -\, xy + 2\lambda y^2 = 0 & (II \cdot y) \\ \hline 2\lambda x^2 - 2\lambda y^2 & \end{array}$$

$\lambda \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y^2$

$$\Rightarrow \quad \star \begin{cases} x^2 + y^2 \\ 2x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\lambda = -\frac{1}{2}}, \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\lambda = \frac{1}{2}}}_{\text{lösen} \star}$$

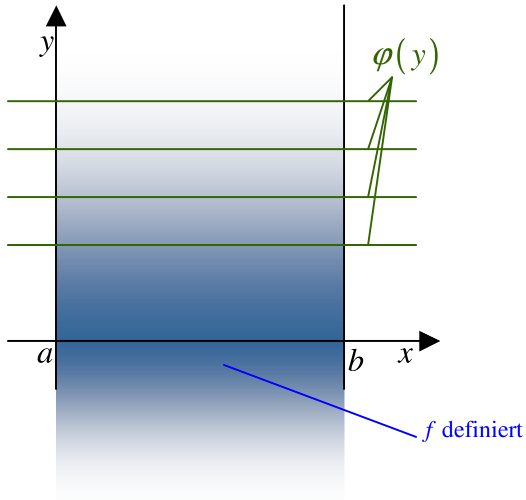
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

Da $M$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt $f$ auf $M$ nach §1 Satz 19 sein Maximum und Minimum an.

$\Rightarrow$ Dort sind die lokalen Extremalstellen mit Nebenbedingungen $h$ von $f$.

# § 7 Integrale mit Parametern




Sei $f:\begin{cases}[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ stetig

Betrachte: $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$

Frage: Wann ist $\varphi$ stetig, differenzierbar etc...?

Hilfssatz: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^m$ beliebig

$f:\begin{cases}[a,b]\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ stetig

Sei weiter $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge von Punkten in $\mathbb{U}$ mit $\lim_{k\to\infty}(y_k)\overset{\exists}{=}c\ \in\mathbb{U}$

$\Rightarrow$ Die Funktionen $F_k:\begin{cases}[a,b]\to\mathbb{R}\\x\mapsto f(x,c)\end{cases}$

Beweis: § 1 Satz 14 $\Rightarrow Q:=\{y_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}\cup\{c\}\subset\mathbb{R}^m$ ist kompakt

$\Rightarrow[a,b]\times Q\subset\mathbb{R}^{m+1}$ kompakt

§ 1 Satz 20 $\Rightarrow f\big|[a,b]\times Q\to\mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig

Sei $\varepsilon>0$

z.Z. $\exists N\in\mathbb{N}$, so dass $|F(x)-F_k(x)|<\varepsilon\qquad\forall x\in[a,b],\quad\forall k\geq N$

Da $f\big|[a,b]\times Q$ gleichmäßig stetig $\exists\delta>0$, so dass

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon\qquad\forall(x,y),(x',y')\in[a,b]\times Q$$

$$\text{mit }\|(x,y)-(x',y')\|<\delta$$

Da $\lim_{k\to\infty}y_k=c\quad\exists N\in\mathbb{N}$, so dass $\|c-y_k\|<\delta\qquad\forall k\geq N$

$\forall k\geq N$ ist also: $|f(x,c)-f(x,y_k)|<\varepsilon\qquad\forall x\in[a,b]$

$\Leftrightarrow|F(x)-F_k(x)|<\varepsilon\qquad\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow F_k$ gleichmäßig konvergent gegen $F$ auf $[a,b]$

**Satz 1:** Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ beliebig

$f:\begin{cases}[a,b]\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ stetig

Für $y\in\mathbb{U}$ sei $\varphi(y):=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$

$\varphi:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ stetig

Beweis: Sei $c \in \mathbb{U}$ beliebig

$y_k \in \mathbb{U}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = c$

z.Z. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(y_k) \overset{\exists}{=} \varphi(c)$

Wie oben sei $F_k(x) = f(x, y_k), \quad F(x) = f(x,c)$

Also: $\varphi(y_k) = \int\limits_a^b F_k(x)\,\mathrm{dx}$

$\varphi(c) = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{dx}$

HS $\Rightarrow (F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $F$ auf $[a,b]$

Analysis I $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_a^b F_k(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_a^b \lim\limits_{k\to\infty} F_k(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{dx} = \varphi(c)$