Hilfssatz 2: $\mathbb{I},\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}$ kompakte Intervalle
$f:\mathbb{I}\times\mathbb{J}\to\mathbb{R}$ stetig, im 2. Argument stetig partiell differenzierbar
$y_k\to c,\ y_k\in\mathbb{J},\ y_k\neq c,\ c\in\mathbb{J}$

Definiere: $F_k(x):=\dfrac{f(x,y_k)-f(x,c)}{y_k-c}$

$F(x)=D_2f(x,c)$

Dann konvergiert F_k auf $\mathbb{I}$ gleichmäßig gegen F.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$

$D_2f:\ \underbrace{\mathbb{I}\times\mathbb{J}}_{\text{kompakt}}\to\mathbb{R}$ ist stetig auf kompakter Menge, also gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein $\delta>0$ mit $|D_2f(x,y)-D_2f(x,y')|<\varepsilon\quad\forall x\in\mathbb{I},\ y,y'\in\mathbb{J},\ \text{mit}\ |y-y'|<\delta$ $\star$

x fest, 1-dimensional

MWS $\Rightarrow\forall k\quad\exists\eta_K$ zwischen c und y_k mit $F_k(x)=D_2f(x,\eta_k)$

$\exists N:\quad |c-y_k|<\delta\qquad\forall k\geq N$

$\Rightarrow|c-\eta_k|<\delta\quad\forall k\geq N$

$\Rightarrow|F(x)-F_k(x)|=|D_2f(x,c)-D_2f(x,\eta_k)|\overset{\star}{<}\varepsilon\qquad\forall x\in\mathbb{I},\quad\forall k\geq N$

$\Rightarrow F_k\to F$ gleichmäßig konvergent

Satz 2: $\mathbb{I},\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}$ kompakte Intervalle
$f:\mathbb{I}\times\mathbb{J}\to\mathbb{R}$ stetig, im 2. Argument stetig partiell differenzierbar

Sei $\varphi(y):=\int\limits_{\mathbb{I}}(x,y)\,\mathrm{d}x\qquad(y\in\mathbb{J})$

Dann ist $\varphi:\mathbb{J}\xrightarrow{\mathbb{I}}\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\varphi'(y)=\int\limits_{\mathbb{I}}D_2f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: c,y_k,F_k,F wie in Hilfssatz 2 definiert.

$\star\star\Rightarrow F_k\to F$ gleichmäßig

$$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(y_k)-\varphi(c)}{y_k-c}=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{I}}\overbrace{\frac{f(x,y_k)-f(x,c)}{y_k-c}}^{=F_k(x)}\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{I}}\frac{f(x,y_k)-f(x,c)}{y_k-c}\mathrm{d}x=\int\limits_{\mathbb{I}}D_2f(x,c)\,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow\varphi'(c)$ existiert und ist gleich $\int\limits_{\mathbb{I}}D_2f(x,c)\,\mathrm{d}x$

Nach Satz 1 ist φ' stetig, da D_2f auf $\mathbb{I}\times\mathbb{J}$ stetig ist

Beispiel 1: $\int_0^a x\exp(x)\,\mathrm{dx} = ?$

$$F(y) := \int_0^a \exp(xy)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{y}\left(\exp(ay)-1\right)$$

$$F'(y) \overset{\text{Satz 2}}{=} \int_0^a x\exp(xy)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{y^2}\left(\exp(ay)-1\right)+\frac{a}{y}\exp(ay)$$

$$\Rightarrow \int_0^a x\exp(x)\,\mathrm{dx} = F'(1) = -\left(\exp(a)-1\right)+a\exp(a) = 1+(a-1)\exp(a)$$

Beispiel 2: Sei $\mathbb{U} := \left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| < r\right\}$ eine offene Kugel um 0 mit Radius $r>0$ und $v=(v_1,\dots,v_n);\mathbb{U}\to\mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Frage: Ist v ein Gradientenvektorfeld, d.h. gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ mit $\mathit{grad} f = v$ (Also $D_1 f = v$)?

Existiert f, so gilt offenbar:

$$D_j v_i = D_j D_i f \underset{\substack{f\text{ 2-mal stetig}\\ \text{differenzierbar}}}{=} D_i D_j f = D_i v_j \quad ★$$

Die Bedingung ★ ist also notwendig, aber ist sie auch hinreichend für die Existenz von f?

Sei ★ erfüllt.

Definiere: $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ durch $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 v_i(tx)\,\mathrm{dt} \quad x\in\mathbb{U}$

Behauptung: $D_j f = v_j$

Beweis: $$D_j f = \sum_{i=1}^n x_i D_j\left(\int_0^1 v_i(tx)\,\mathrm{dt}\right) + \sum_{i=1}^n \left(D_j x_i\right)\cdot\int_0^1 v_i(tx)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t\cdot\left(D_j v_i\right)(tx)\,\mathrm{dt} + \int_0^1 v_j(tx)\,\mathrm{dt}$$

Ferner: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(tv_j(tx)\right) = v_j(tx) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}v_j(tx) =$$

$$= v_j(tx) + t\cdot\sum_{i=1}^n \left(D_i v_j\right)(tx)\cdot x_i = v_j(tx) + t\cdot\sum_{i=1}^n\left(D_j v_i\right)(tx)\,x_i$$

$$\Rightarrow D_j f = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(tv_j(tx)\right)\mathrm{dt} \overset{\text{HDI}}{=} tv_j(tx)\Big|_{t=0}^1 = v_j(x)$$

HDI = Hilfssatz des Integrals

Insbesondere: Ein auf einer offenen Kugel $\mathbb{U}\subseteq\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld $v:\mathbb{U}\to\mathbb{R}^2$ ist Gradient einer stetig differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ auf $\mathbb{U}$ gilt.

Doppelintegrale

Sei $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

Satz 1 $\Rightarrow F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ ist stetig auf $[c,d]$

$\Rightarrow \int_c^d F(y)\,\mathrm{dy} = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ ist definiert und heißt **Doppelintegral**.

Frage: Gilt stets $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$?

Satz 3: Für jede stetige Funktion f gilt stets $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$

Beweis: Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ \varphi(y) := \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^y f(x,t)\,\mathrm{dt} \right)}_{\text{HDI}\Rightarrow\text{stetig differenzierbar}} \mathrm{dx}$

Es gilt: $\varphi(c) = 0$

Satz 2 $\Rightarrow \varphi$ differenzierbar mit $\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \int_c^y f(x,t)\,\mathrm{dt}\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$

$\Rightarrow \int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}}_{\varphi'(y)}\,\mathrm{dy} = \int_c^d \varphi'(y)\,\mathrm{dy} = \varphi(d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ $\square$

Bemerkung: i) Analog für n-fache Integrale

ii) Die Voraussetzung „f stetig" lässt sich deutlich abschwächen, wenn man einen leistungsfähigeren Integralbegriff nimmt (Satz von Tonelli)

Eulersche Differentialgleichung und Variationsrechnung

Situation: $\mathbb{I} = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall

$L : \mathbb{I}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar

$(t,y,p) \mapsto L(t,y,p)$

$\mathcal{C}^2[a,b]$ Vektorraum aller 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$

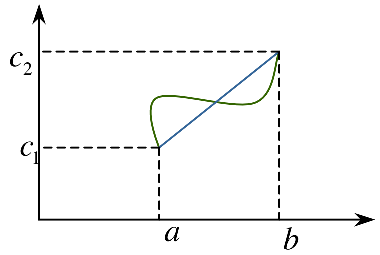
$K := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^2[a,b] \,\middle|\, \varphi(a) = c_1, \varphi(b) = c_2 \right\}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Definiere: $S : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$

$\varphi \mapsto \int_a^b L(t,\varphi(t),\varphi'(t))\,\mathrm{dt}$

Problem: Finde $\varphi \in \mathbb{K}$ mit $S(\varphi) = \inf_{\psi\in\mathbb{K}} S(\psi)$

Beispiel:



Welche Kurve von (a,c_1) nach (b,c_2) hat die kleinste Bogenlänge?

Nehme $L(t,y,p)=\sqrt{1+p^2} \Rightarrow S(\varphi)=\int_a^b \sqrt{1+\varphi'(t)^2}\,\mathrm{dt}$ = Bogenlänge der Kurve $t \mapsto (t,\varphi(t)) = \mathrm{Min}$

Satz 4: Notwendig für $S(\varphi)=\inf_{\psi\in\mathbb{K}} S(\psi)$ ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_3 L(t,\varphi(t),\varphi'(t))\right) - D_2 L(t,\varphi(t),\varphi'(t)) = 0$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathbb{K}$ mit $S(\varphi) \le S(\psi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{K}$

$g \in \mathcal{C}^2[a,b],\ g(a)=g(b)=0$ („Testfunktionen")

$\Rightarrow \varphi+\varepsilon g \in \mathbb{K} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow S(\varphi) \le S(\varphi+\varepsilon g) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

Sei $F(\varepsilon) := S(\varphi+\varepsilon g)$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hat in $\varepsilon=0$ ein Minimum

$$\Rightarrow \frac{dF}{d\varepsilon}(0)=0$$

$$\frac{dF}{f\varepsilon}(\varepsilon)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon} L(t,\varphi(t)+\varepsilon g(t),\varphi'(t)+\varepsilon g'(t))\,\mathrm{dt}$$

$$\overset{\text{KR}}{=} \int_a^b D_2 L(\ldots)\cdot g(t) + D_3 L(\ldots)\cdot g'(t)\,\mathrm{dt}$$

NR: $\int_a^b D_3 L(\ldots) g'(t)\,\mathrm{dt} = D_3 L(\ldots g(t))\Big|_{t=a}^{a} - \int_a^b g(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(D_3 L(\ldots))\,\mathrm{dt}$

$$0=\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}=0=\int_a^b D_2 L(t,\varphi(t),\varphi'(t)) g(t) - g(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_3 L(t,\varphi(t),\varphi'(t))\,\mathrm{dt}$$

$$\overset{\text{HS}}{\Rightarrow} D_2 L(t,\varphi(t),\varphi'(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_3 L(t,\varphi(t),\varphi'(t)) = 0$$

Hilfssatz 3: Sei $a<b,\ f[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

Es gelte $\int_a^b g(t) f(t)\,\mathrm{dt}=0 \qquad \forall g \in \mathcal{C}^2[a,b],\ g(a)=g(b)=0$

Dann ist $f \equiv 0$.