$I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt mit

$L : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar

$(t, y, p) \to \mathbb{R}$

$C^2[a,b]$

$K = \{\varphi \in C^2[a,b], \varphi(a) = c_1, \varphi(b) = c_2\}$

$S := K \to \mathbb{R}$

$$\varphi \to \int_0^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\,\mathrm{dt}$$

Satz 4: $S(\varphi) = \inf_{\psi \in K} S(\psi)$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_3 L(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - D_2 L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\right)$$

Hilfssatz 3: Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Es gelte: $\int_a^b f(t)\, g(t)\,\mathrm{dt} = 0 \qquad \forall g \in C^2[a,b]$ mit $g(a) = g(b) = 0$

Beweis: Es genügt $f(t) = 0$ für $t \in [a,b]$ zu beweisen.

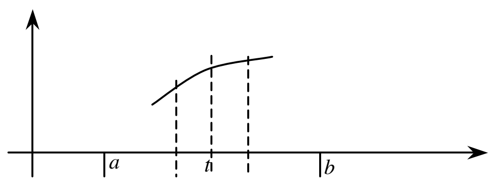
Angenommen: $f(t) \neq 0$ für $t \in]a,b[$, Œ$\varepsilon := f(t) > 0$

Dann existiert $\delta > 0$ mit $U(x,\delta) \subseteq]a,b[$

und $f(x) \geq \varepsilon$ für $x \in U(t,\delta)$

Sei $g \in C^2[a,b]$ mit $g(t) > 0$, $g(x) = 0$, falls $x \notin U(t,\delta)$

$g(x) \geq 0$ für $x \in U(t,\delta)$

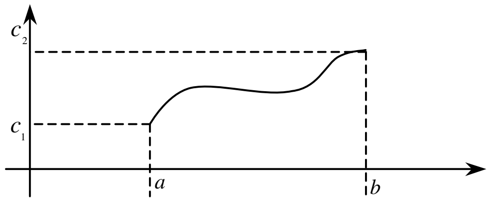


z.B. $g(x) = (x - (t - \delta))^2 \cdot (x - (t + \delta))^2$

$$0 = \int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{dx} = \int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\, g(x)\,\mathrm{dx} \geq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{t-\delta}^{t+\delta} g(x)\,\mathrm{dx}}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ $\square$

Zurück zum Beispiel:



$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

$t\mapsto(t,\varphi(t))$ Kurve

$L(t,y,p):=\sqrt{1+p^2}$

$D_1L=0,\ D_2L=0,\ D_3L=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

Euler: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{1+\varphi(t)^2}}=0$

$$\Rightarrow\frac{\varphi''(t)}{\sqrt{1-\varphi'(t)^2}}-\varphi'(t)\cdot\frac{\varphi'(t)\varphi''(t)}{\left(1-\varphi'(t)^2\right)^{3/2}}=0$$

$$\Rightarrow\varphi''(t)\cdot\left(1-\frac{\varphi'(t)^2}{\left(1+\varphi'(t)^2\right)}\right)=0$$

$$\Rightarrow\varphi''(t)\frac{1}{1+\varphi'(t)^2}=0$$

$$\Rightarrow\varphi''(t)=0$$

$$\Rightarrow\varphi(t)=m\cdot t+c_0$$

Das legt φ fest

φ beschreibt die geradlinige Verbindung zwischen (a,c_1) und (b,c_2).

§ 8 Existenz und Eindeutigkeitssatz

Definition: Sei $G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{nk}$ und $f:G\to\mathbb{R}^k$ stetig

Dann heißt $y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right)$

ein **System aus k Differentialgleichungen n-ter Ordnung**.

Eine Lösung hiervon ist eine auf einem Intervall definierte Funktion $\varphi:I\to\mathbb{R}^k$ n-mal stetig differenzierbar, mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Menge $\left\{y_\nu=\varphi^{(\nu)}(x)\,\middle|\,(x,y_0,\dots,y_{n-1})\in I\times\mathbb{R}^{nk},0\le\nu\le n-1\right\}$ ist in G enthalten.

ii) Es gilt $\varphi^{(n)}(x)=f\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n-1)}(x)\right)\qquad\forall x\in I$.

Beispiel: $k=1$, d.h. eine DGL n-ter Ordnung, $n=2$

$y''=f(x,y,y')$, $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$

DGL z.B. $y''=y$ hat als Lösungen z.B.

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \varphi(x)=e^{x} & (I=\mathbb{R}) \\ 2) & \varphi(x)=e^{-x} & \end{array}\right\} \text{erfüllen die Bedingungen}$$

Einfachster Fall: $n=k=1$ f hängt von x ab.

$y'=f(x)$ ☆

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$F'=f$, also ist F eine Lösung von ☆

Reduktion auf $n=1$

Eine DGL n-ter Ordnung lässt sich auf ein System von DGL_n 1.Ordnung Zurückführen.

$$y^{n}=f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$$

$$\underset{\text{System aus n Gleichungen 1. Ordnung}}{\sim\sim\sim>}\begin{cases} y_0'=y_1 & [\![y_0 := 0-\text{te Ableitung}]\!] \\ y_1'=y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}'=f(x,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}) \end{cases}$$

Lösung $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \vdots \\ \varphi_{n-1}\end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ Lösung φ_0

Lösung y ------------→ Lösung $\varphi=\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}$

Daher darf man sich für theoretische Überlegungen auf Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung beschränken.

Bemerkung: (Zur Terminologie)

Gewöhnliche DGL: Lösungen φ hängen nur von einer Variablen $x\in\mathbb{R}$ ab. (In Analysis II angeschnitten)

Partielle DGL: Lösungen hängen von mehreren Variablen ab. (nicht in Analysis II)

Definition: Sei $G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ und $f:G\to\mathbb{R}^k$ eine Funktion.
f genügt einer **Lipschik-Bedingung** mit Konstante L,
falls für alle $(x,y),(x,\tilde{y})\in G$

$\left\| f(x,y)-f(x,\tilde{y})\right\| \le L\cdot\left\| y-\tilde{y}\right\|$ gilt.

f genügt **lokal** einer **Lipschik-Bedingung**, falls es zu allen $(a,b)\in G$ eine

Umgebung $\mathbb{U}$ von (a,b) gibt, so dass f in $G\cap\mathbb{U}$ einer Lipschik-Bedingung mit einer Konstanten $L_{\mathbb{U}}$ genügt.

Satz 1: Sei $G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ offen und $f:G\to\mathbb{R}^k$ eine bzgl. des 2. Arguments stetig partiell differenzierbare Funktion.
Dann genügt f in G lokal einer Lipschik-Bedingung.

Beweis: Sei $(a,b)\in G$

Es genügt ein $r>0$ mit $\mathbb{V}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\,\middle\|\,\|x-a\|\le r,|y-b|\le r\right\}\subseteq G$

$\mathbb{V}$ ist eine kompakte Umgebung von (a,b).

Alle Einträge der $k\times k-$Matrix $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sind stetig.

$$\Rightarrow L=\sup\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\|\,\middle|\,(x,y)\in Y\right\}<\infty$$

$$\text{MWS}\Rightarrow\left\|f(x,y)-f(x,\tilde{y})\right\|\subseteq L\left\|y-\tilde{y}\right\|\qquad\forall(x,y),(x,\tilde{y})\in Y$$

Satz 2: (Eindeutigkeitssatz)
Sei $G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ und $f:G\to\mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschik-Bedingung genügt.
Seien $\varphi,\psi:I\to\mathbb{R}^k$ zwei Lösungen von der DGL $y=f(x,y)$
$\varphi(a)=\psi(a)$ für ein $a\in I$, so folgt:

$$\Rightarrow\varphi(x)=\psi(x)\qquad\forall x\in I$$

Beweis: 1.Behauptung: $\exists\varepsilon>0,\ \varphi(x)=\psi(x)$ für alle $x\in[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\cap I$ gilt:

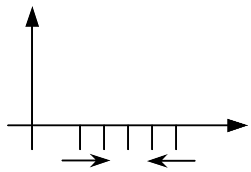
$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x)&=f(x,\varphi(x))\\ \psi'&=f(x,\psi(x))\end{aligned}\right\}\varphi(x)-\psi(x)=\int_a^b\left(f(....?....)\right)\ ☆$$

f lokal Lipschik $\Rightarrow\exists\delta>0$, L mit

$$\left\|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))\right\|\le L\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|\qquad\text{für }t\in[a-\delta,a+\delta]\cap I$$

$$\Rightarrow\left\|\varphi(x)-\psi(x)\right\|\le\int_a^x\left\|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))\right\|\mathrm{dt}$$

$$\le L\cdot\left|\int_a^x\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|\mathrm{dt}\right|$$



(Integral kleiner machen)

Sei $M(x):=\sup\left\{\left\|\varphi(t)-\psi(t)\right\|\ \middle|\ |t-a|\le|x-a|\right\}$

Für $\xi\in I$ mit $|\xi-a|\le|x-a|\le\delta$ gilt:

$$\left\|\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right\|\le L\cdot|\xi-a|\qquad M(\xi)\le L\cdot|x-a|M(x)$$

$$\Rightarrow M(x)\le L\cdot|x-a|M(x)$$

Sei $\varepsilon=\min\left\{\delta,\dfrac{L}{2}\right\}$ und $|x-a|\le\varepsilon$

$$\Rightarrow M(x) \le L \cdot \varepsilon \cdot M(x) \le \frac{1}{2} M(x) \qquad \Rightarrow M(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \quad \text{für } x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I$$

2.Behauptung: $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \ge a,\ x \in I$

Sei $x_1 = \sup\left\{\xi \in I \,\middle|\, \varphi\big|_{[a,\xi]} = \psi\big|_{[a,\xi]}\right\}$

Falls $x_1 = \sup I \;\Rightarrow$ fertig

Sonst ist $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$, da $\varphi(x) = \psi(x)$ für $a \le x \le x_1$ und φ, ψ stetig

Nach der 1. Behauptung gilt dann

$\varphi(x) = \psi(x)$ in einer Umgebung von x_1 ↯ zur Definition von x_1