Hier fehlt leider noch der Anfang – wird noch verm. bis zum Deutschland-Holland-Spiel nachgetragen*g*

Beweis: Da G offen $\exists r>0$, so dass

$$V := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1} \,\|x-a\| \le r, \|y-b\| \le r \right\} \subset G$$

und so, dass f auf $\mathbb{V}$ einer LB genügt, d.h. $\exists L \ge 0$, so dass

$$\left\| f(x,\tilde{y}) - f(x,y) \right\| \le L \left\| \tilde{y} - y \right\| \qquad \forall (x,\tilde{y}),(x,y) \in \mathbb{V}$$

Da $\mathbb{V}$ kompakt und f stetig

$\Rightarrow \exists M \ge 0$, so dass $\left\| f(x,y) \right\| \le M \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{V}$

Sei $\varepsilon := \min\left(r, \dfrac{r}{M} \right)$ und $I := [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

Aus HS der DIR folgt: Äquivalent sind für $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$:

a) φ genügt der DGL (1) mit $AB\,\varphi(a) = b$ auf I

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ mit $\varphi(a) = b$

b) $\varphi(x) = b + \int\limits_a^x f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t$

Zur Lösung von b) wende das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf an.

Sei $\varphi_0(x) = b \qquad \forall x \in I$

Sei $k \ge 0$

Angenommen: $\varphi_k : I \to \mathbb{R}$ ist definiert

$$\varphi_{k+1}(x) : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi_{k+1}(x) = b + \int\limits_a^x f(t, \varphi_k(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Behauptung: Die Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist wohldefiniert auf I und konvergiert dort gegen eine Lösung von 1) mit AB.

Beweis: Um zu zeigen, dass φ_{k+1} wohldefiniert ist, genügt es zu zeigen:

$$\left\| \varphi_k(x) - b \right\| \le r \qquad \forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}$$

Beweis durch Induktion:

I. $k = 0 \quad \|b-b\| \le r$

II. Sei $k \ge 0$

Angenommen Behauptung bewiesen für φ_k

$$\left\|\varphi_{k+1}(x)-b\right\| = \left\|b+\int_a^x f\left(t,\varphi_k(t)\right)\mathrm{dt}-b\right\|$$

$$\leq \left|\int_a^x \left\|f\left(t,\varphi_k(t)\right)\right\|\mathrm{dt}\right| \leq \left|\int_a^x M\,\mathrm{dt}\right| = M\cdot|x-a| = M\cdot\varepsilon \leq M\cdot\frac{r}{M} = r$$

Behauptung: $\left\|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\right\| \leq M\cdot L^k\dfrac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall x\in I$

Beweis (Induktion nach k):

I. $k=0 \quad \Rightarrow \left\|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\right\| = \left\|\int_a^x f(t,b)\,\mathrm{dt}\right\| \leq M\,|x-a| = M\cdot L^0\dfrac{|x-a|^{0+1}}{(0+1)!}$

II. Sei $k\geq 1$ und die Behauptung bewiesen für $k-1$

$$\left\|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\right\| = \left\|\int_a^x\left(f\left(t,\varphi_k(t)\right)-f\left(t,\varphi_{k-1}(t)\right)\right)\mathrm{dt}\right\| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^x\left\|f\left(t,\varphi_k(t)\right)-f\left(t,\varphi_{k-1}(t)\right)\right\|\mathrm{dt}\right| \leq$$

$$\overset{\text{LB}}{\leq} \left|\int_a^x L\left\|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\right\|\mathrm{dt}\right| \overset{\text{IA}}{\leq} \left|\int_a^x LML^{k-1}\frac{|x-a|^k}{k!}\mathrm{dt}\right| =$$

$$= \left|\frac{ML^k}{k!}\int_a^x (t-a)^k\,\mathrm{dt}\right| = \left|\frac{ML^k}{k!}\frac{|x-a|^{k+1}}{k+1}\right| =$$

$$= ML^k\frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Also: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right\| \leq \underbrace{M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k\varepsilon^k}{k!}}_{\text{konvergente Majorante}}$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right)$ konvergent gleichmäßig auf I.

$\Rightarrow \varphi(x) := \displaystyle\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = \underset{\varphi_0(x)}{\overset{\|}{b}} + \sum_{k=1}^{a}\left(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right)$

ist auf I stetig differenzierbare Abbildung $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$.

$\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in I$ ist

$$\left\|f\left(x,\varphi(x)\right)-f\left(x,\varphi_k(x)\right)\right\| \overset{\text{LB}}{\leq} L\left\|\varphi(x)-\varphi_k(x)\right\|$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to\infty} f\left(x,\varphi_k(x)\right) = f\left(x,\varphi(x)\right)$ gleichmäßig auf I

Def. $\Rightarrow \varphi(x) = \displaystyle\lim_{k\to\infty}\varphi_{k+1}(x) = b+\int_0^x \lim_{k\to\infty} f\left(t,\varphi_k(t)\right)\mathrm{dt} = b+\int_0^x f\left(t,\varphi(t)\right)\mathrm{dt}$

$\Rightarrow b \quad \overset{(a)\Leftrightarrow(b)}{\Rightarrow}$ Behauptung

Beispiel: $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $y'=f(x,y)=2xy$

Suche Lösung φ mit $AB\,\varphi(0)=b\in\mathbb{R}$

In diesem Fall ist $\varphi_{k+1}(x)=b+2\int\limits_0^x t\varphi_k(t)\,\mathrm{dt}$

Behauptung: $\varphi_k(x)=b\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{k!}\right)\forall k\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Beweis (Induktion nach k):

I. $k=0 \quad \Rightarrow \varphi_0=b=b\left(\frac{x^{2\cdot 0}}{0!}\right)$

II: Sei $k\geq 0$: Angenommen Behauptung bewiesen für φ_k

$$\varphi_{k+1}(x)=b+2\int\limits_0^x t\varphi_k(t)\,\mathrm{dt}$$

$$\overset{\text{IA}}{=}b+2b\int\limits_0^x t\left(1+t^2+\frac{t^4}{2!}+\frac{t^6}{3!}+\ldots+\frac{t^{2k}}{k!}\right)\mathrm{dt}$$

$$=b+2b\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{2\cdot 6}+\frac{x^8}{3!\cdot 8}+\ldots+\frac{x^{2k+2}}{k!\cdot(2k+2)}\right)=$$

$$=b\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\lim_{k\to\infty}b\sum_{\nu=0}^{k}\frac{x^{2\nu}}{\nu!}=b\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{\nu!}=b\cdot e^{x^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

$\varphi(x)=b\cdot e^{x^2}$ löst die DGL (1) mit $AB\,\varphi(0)=b$

denn $\varphi'(x)=2bxe^{x^2}=2x\varphi(x)$

Sei $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $f:G\to\mathbb{R}$ stetig

$\varphi^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ (1) eine DGL n-ter Ordnung

f genügt lokaler Lipschitz-Bedingung: $\Leftrightarrow$

$\forall z\in G\ \exists$Umgebung $\mathbb{U}=\mathbb{U}(z)$ und $L\in\mathbb{R}_+$, so dass

$$\left|f\left(x,\tilde{Y}\right)-f(x,Y)\right|\leq L\left\|\tilde{Y}-Y\right\|\qquad\forall(x,Y),\left(x,\tilde{Y}\right)\in\mathbb{U}\cap G$$

$$Y=\left(y_0,\ldots,y_{n-1}\right),\tilde{Y}=\left(\tilde{y}_0,\ldots,\tilde{y}_{n-1}\right)$$

Korollar: Sei $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f:G\to\mathbb{R}$ stetig, f genüge lokaler LB

a) Eindeutigkeitssatz:
Seien $\varphi,\psi:I\to\mathbb{R}$ 2 Lösungen von (1)
Und für ein $a\in I$ gelte:

$$\varphi(a)=\psi(a)$$
$$\varphi'(a)=\psi'(a)$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{(n-1)}(a)=\psi^{(n-1)}(a)$$

$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \qquad \forall x \in I$

b) Existenzsatz:
Sei $(a, b_0, \dots, b_{n-1}) \in G$ gegeben
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$

Beweis: Wandle (1) in ein DGL-System 1. Ordnung um und wende Eindeutigkeits- und Existenzsatz an:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

a) Nach Eindeutigkeitssatz sind 2 Lösungen $\phi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ von (2) mit $AB\, \phi(a) = \Psi(a)$ gleich

$$\phi(a) = \left(y_0(a), y_0'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)\right) = \left(\psi_0(a), \psi_0'(a), \dots, \psi_0^{(n-1)}(a)\right) = \Psi(a)$$

Für (1) besagt das die Behauptung

Beispiel: 1) $y'' = f(x, y, y') = -y \qquad G = \mathbb{R}^3$

Lösungen sind: $\varphi_1(x) = \sin x \qquad$ (denn $(\sin x)'' = -\sin x$)

$\varphi_2(x) = \cos x \qquad$ (denn $(\cos x)'' = -\cos x$)

$\Rightarrow \varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist Lösung von (1)

Da $\varphi(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2$

$\varphi'(0) = c_1 \cos(0) - c_2 \sin(0) = c_1$

ist $\varphi(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $AB \begin{cases} \varphi(0) = c_2 \\ \varphi'(0) = c_1 \end{cases}$