§ 9 Elementare Lösungsmethoden

a) DGL mit getrennten Variablen

Sei $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle
$f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ stetig

Die DGL $y' = f(x)g(y)$ *(1)* heißt DGL mit **getrennten Variablen**.

Angenommen: $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in J$

Lösung in einprägsamer Form:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x)g(y) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{dy}}{g(y)} = f(x)\mathrm{dx}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{dy}}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{dx} + \mathrm{const.} \quad (2)$$

Löse *(2)* nach y auf: $y = \varphi(x)$ ist Lösung von *(1)*

Satz 1: Seien $x_0 \in I, y_0 \in J$.

$$F : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{dt} \end{cases}, \quad G : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{dt}}{g(t)} \end{cases}$$

Sei $I' \subset I$ ein Intervall um x_0 und $F(I') \subset G(J)$
$\Rightarrow \exists$ genau eine Lösung
$\varphi : I' \to \mathbb{R}$
von *(1)* mit $AB\ \varphi(x_0) = y_0$

Bemerkung: Beachte, eine Lipschitz-Bedingung ist nicht vorausgesetzt.

Beweis: (i) Behauptung: Ist $\varphi' : I' \to \mathbb{R}$ eine Lösung von *(1)* mit $\varphi(x_0) = y_0$, so gilt:

$$(2) \qquad G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in I'$$

Beweis: $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t)) \quad \forall t \in I'$

$$\Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{dt}$$

Substitution (auf der linken Seite): $u = \varphi(t)$

$$G(\varphi(x)) = \int\limits_{y_0=\varphi(x_0)}^{y=\varphi(x)} \frac{\mathrm{du}}{g(u)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{dt} = F(x)$$

(ii) Eindeutigkeit: Da $G'(y)=\frac{1}{g(y)}\neq 0 \quad \forall y\in J$, ist G streng monoton.

$\Rightarrow G$ besitzt stetig differenzierbare Umkehrfunktion $H: G(J)\to\mathbb{R}$

(2) $\Rightarrow \varphi(x)=H(F(x)) \quad \forall x\in I'$

also φ eindeutig bestimmt durch *(1)* und AB.

(iii) Existenz: Sei $\varphi(x):=H(F(x)) \quad \forall x\in I'$

φ ist stetig differenzierbar mit $\varphi(x_0)=H(F(x_0))=H(0)=y_0$.

Definition von $\varphi \Rightarrow G(\varphi(x))=F(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{G'(\varphi(x))\varphi'(x)}_{=\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}}=\underbrace{F(x)}_{=f(x)}$$

$\Rightarrow \varphi'(x)=f(x)g(\varphi(x))$

$\Rightarrow$ Behauptung

Bemerkung: Die eindeutig bestimmte Lösung ist also $\varphi(x)=H(F(x))$, wo H die Umkehrfunktion von G ist.

Beispiel: $y'=-\frac{x}{y}$ *(1)* mit $AB\ \varphi(-1)=0$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto -x\end{cases},\quad g:\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ y\mapsto \frac{1}{y}\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-1}^{x}t\,\mathrm{dt}=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2},\qquad G(y)=\int_0^y t\,\mathrm{dt}=\frac{y^2}{2}$$

Es ist $F(-1,0)=\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset G(\mathbb{R}_+^*)$.

Es ist $H(y)=\sqrt{2y}$ Umkehrfunktion von G auf $G(\mathbb{R}_+^*)$.

(denn $HG(y)=H\left(\frac{y^2}{2}\right)=y,\quad GH(x)=G\left(\sqrt{2x}\right)=x$)

Satz $\Rightarrow \varphi(x)=H(F(x))=H\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{-x^2+1}$ ist Lösung von *(1)*

mit $\varphi(-1)=0$

b) Lineare DGLn 1. Ordnung
$I\subset\mathbb{R}$ Intervall $\quad a,b: I\to\mathbb{R}$ stetig

Definition: $y'=a(x)y+b(x)$ heißt lineare DGL 1. Ordnung. *(1)* heißt **homogen**, falls $b\equiv 0$, sonst inhomogen.

Satz 2: Sei $x_0 \in I$ und $b \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL
$y' = a(x)\, y$ mit $AB\; \varphi(x_0) = b_j$, nämlich
$$\varphi(x) = b \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Beweis: $F(x, y) = a(x)\, y$ ist stetig partiell nach y differenzierbar
Satz $\Rightarrow F$ genügt lokaler LB
$\Rightarrow$ Eindeutigkeit der Lösung
$$\varphi'(x) = b \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) a(x)$$
$$= a(x)\varphi(x)$$
$\Rightarrow$ Existenz der Lösung

Bemerkung 1: Man könnte auch Trennung der Variablen anwenden.

Bemerkung 2: $\varphi(x)$ ist Lösung auf ganz I.

Beispiel: $y' = \dfrac{y}{x}$ mit $AB\; y(1) = 2$

$a(x) = \dfrac{1}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ stetig

Allgemeine Lösung ist $\varphi(x) = \text{const} \cdot \exp\left(\int_{1}^{x} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}\right) = \text{const} \cdot \exp(\log x) = \text{const} \cdot x$

Wähle Konstante $= 2$

Inhomogene lineare DGL $\quad y' = a(x)\, y + b(x)\; (1)$
$y' = a(x)\, y\; (2)$ heißt zugehörige homogene lineare DGL
Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von *(2)*
Annahme: $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ (Œ sonst verkleinere I)
$\Rightarrow$ Eine beliebige Lösung von *(1)* läßt sich schreiben als
$\psi(x) = \varphi(x) \cdot u(x)$ mit stetig differenzierbarer Funktion $u : I \to \mathbb{R}$

Welcher Bedingung muss u genügen, damit ψ die DGL *(1)* löst?

$$\psi'(x) = \varphi'(x)u(x) - \varphi(x)u'(x)$$
$$\|$$
$$a(x)\psi(x) + b(x) = a(x)\varphi(x)u(x) + b(x)$$

wegen $\varphi' = a\varphi$ gilt:

$$\psi' = a\psi + b \Leftrightarrow \varphi u' = b \Leftrightarrow u' = \frac{b}{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)} \mathrm{d}t + \text{const}$$

Satz (Variation der Konstanten)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a.b : I \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ Zu beliebigem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ von *(1)* mit *AB* $\psi(x_0) = c$, nämlich $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)} \mathrm{d}t \right)$,

wobei $\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t) \mathrm{d}t \right)$

„Durch Variation der Konstanten erhält man partikuläre Lösung."

Bemerkung: Allgemeine Lösung von *(2)* ist von der Form $c \cdot \varphi_0(x)$

Ansatz: $\psi(x) = u(x) \cdot \varphi_0(x)$

Satz 3: Sei $\psi_0 : I \to \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von *(1)*. Die allgemeine Lösung von *(1)* hat die Form $\psi = \psi_0 + \varphi$ wi φ allgemeine Lösung von *(2)* ist.

Beweis: $\psi_0' = a\psi_0 + b \qquad \varphi' = a\varphi$

$$\Rightarrow \psi' = \psi_0' + \varphi' = a\psi_0 + b + a\varphi = a(\psi_0 + \varphi) + b = a\psi + b$$

Beispiel: $y' = (\sin x) y + (\sin x)$ mit *AB* $\psi(0) = 0$. $I = \mathbb{R}$

1. Schritt: **Bestimme** allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

$y' = (\sin x) y$ hat die allgemeine Lösung:

$$\varphi(x) = c \cdot \exp\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \, \mathrm{d}t \right) = c \cdot \exp(-\cos x)$$

2.Schritt: **Bestimme** eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Ansatz: $\psi_0(x) = u(x) \cdot \varphi(x) = u(x) \cdot \exp(-\cos x)$

$$\psi_0'(x) = (\sin x)\psi_0(x) + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \cdot \exp(-\cos x) \cdot \sin x + u'(x) \cdot \exp(-\cos x) =$$

$$= \sin x \cdot u(x) \cdot \exp(-\cos x) + \sin x$$

$$\Leftrightarrow u'(x) = \sin x \exp(\cos x)$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^1 \sin t \exp(\cos t)\,\mathrm{dt} + c$$
$$= -\exp(\cos x)$$
$$\Rightarrow \psi_0(x) = u(x)\exp(\cos x) = -1$$

3. Schritt: **Bestimme** die allgemeine Lösung von *(1)*.
Satz 3: $\psi(x) = -1 + c \cdot \exp(\cos x)$

4. Schritt: **Bestimme** c so, dass $\psi(0) = 0$ ist.

$$0 = \psi(0) = -1 + c \cdot \exp(-1) = -1 + \frac{c}{e}$$
$$\Rightarrow c = e$$

Lösung ist $\psi(u) = -1 + e \cdot \exp(-\cos x)$