

Die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

$f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$G := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^x \times \mathbb{R} \mid \frac{y}{x} \in J \right\}$$

Definition: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ heißt **homogene Differentialgleichung**.

Satz 4: $I = \mathbb{R}^x$ Intervall

$$(x_0, y_0) \in G, x_0 \in I$$

Dann gilt:

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lösung von (1) } y'(x_0) = y_0$$

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{R}, \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \text{ Lösung von (2) } z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) \text{ mit } \psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$$

Beweis: " \Rightarrow ": Sei φ eine Lösung von (1)

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x} f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x} \left(f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x} \right) = \frac{1}{x} (f(\psi(x)) - \psi(x))$$

Also ist ψ eine Lösung von (2).

" \Leftarrow ": Sei ψ Lösung von (2), $\varphi(x) := x\psi(x)$

$$\varphi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) =$$

$$= \psi(x) + x \frac{1}{x} (f(\psi(x)) - \psi(x)) =$$

$$= f(\psi(x)) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

Also ist φ Lösung von (1). \square

Beispiel: DGL $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ auf $\mathbb{R}_+^x \times \mathbb{R}$

$$f(t) = t + \frac{1}{t}$$

Form (2): $z' = \frac{1}{x} \left(z + \frac{1}{z} - z \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z}$

$$\int z \, dz = \int \frac{1}{x} \, dx + C$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln x + C \quad \Rightarrow \quad z = \pm \sqrt{2(\ln x + C)}$$

zurück auf die Form (I): $y = \pm x \sqrt{2(\ln x + C)}$

Differenzialgleichung der Form $y'' = f(y)$:

$J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $y'' = f(y)$

Aus der Physik $y =$ Ort eines Teilchens

$y' =$ Geschwindigkeit

$y'' =$ Beschleunigung

$x =$ Zeit

z.B. geladenes Teilchen im elektrischen Feld

Neue Bezeichnungen $y \rightsquigarrow x$

$x \rightsquigarrow t$

Definiere Potential $U(x) := -\int_a^x f(\xi) \, d\xi$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx}(x)$$

Angenommen: $x = x(t)$ ist eine Lösung

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x(t)) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \exists E \in \mathbb{R} : \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x(t))}_{} = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} v(t) + U(x(t)) = E$$

Insbesondere: $E - U(x(t)) \geq 0 \quad \forall t$

$$U(x(t)) \leq E \quad \forall t$$

Ferner: $v(t) = \pm \sqrt{2(E - U(x(t)))}$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt}(x) = \pm \sqrt{2(E - U(x(t)))}$$

Separierte Variablen $G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = t - t_0$

Also: $x(t) = H(t - t_0)$, wobei H die Umkehrfunktion von G ist.

Beispiel: Harmonischer Oszillator $\frac{d^2x}{dt^2} = -K \cdot x$
 Anfangsbeschleunigung $x(t_0) = 0, \frac{dx}{dt}(t_0) = v_0 > 0$

Wie oben: $U(x) = -\int_0^x (-K \cdot \xi) d\xi = \frac{K}{2} x^2$

$$E = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt}(t_0)^2 + U(x(t_0)) = \frac{1}{2} v_0^2$$

$$\text{Also } \{x \in \mathbb{R} \mid U(x) < E\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \frac{v_0}{\sqrt{K}} \right\}$$

Daher $A := \frac{v_0}{\sqrt{K}}$ „Amplitude“

$w := \sqrt{K}$ „Frequenz“

$$G(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x_0^2 - K\xi^2}} = \frac{1}{Aw} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{A}\right)^2}} \quad \left\| \begin{array}{l} \xi = uA, u = \frac{\xi}{A} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{Aw} \cdot \int_0^{\frac{x}{A}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{w} \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$\Rightarrow t - t_0 = \frac{1}{w} \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$\Rightarrow x = A \sin(w(t - t_0))$$

§ 10(?) Lineare Differentialgleichungen

Definition: $I \subseteq \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R}) \text{ stetig, d.h. alle } a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Dann heißt $y' = A(x) \cdot y$ **homogenes lineares Differentialgleichungssystem**.

$$\text{Sei } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig}$$

Dann heißt $y' = A(x) \cdot y + b(x)$ **inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem**.

Bemerkung: Man kann auch Komplexwertig arbeiten, also

$M(n \times n, \mathbb{C})$ statt $M(n \times n, \mathbb{R})$ und \mathbb{C}^n statt \mathbb{R}^n nehmen (aber stets $I \subseteq \mathbb{R}$).

Wegen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist ein System aus n komplexen Gleichungen äquivalent zu einem System aus $2n$ reellen Gleichungen.

Einheitliche Darstellung: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz 1: $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

$$A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$$

$$b: I \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}$$

Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ von $y' = A(x)y + b(x)$ mit der AB $\varphi(x_0) = c$

Bemerkung: Lösung existiert auf ganz I .

Das gilt bei allgemeiner DGL $y' = f(x, y)$ nicht (Beispiel $y' = y^2$).

Beweis: Sei $f(x, y) := A(x)y + b(x)$

Zeige $J \subset I$ kompakt $\Rightarrow f$ erfüllt auf $J \times \mathbb{K}^n$ eine (globale) Lipschitz-Bedingung

Denn A stetig $\Rightarrow L := \sup\{\|A(x)\| \mid x \in I\} < \infty$

$$\Rightarrow \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

§10, Satz 2 \Rightarrow Lösung ist eindeutig

Existenz mit Picard-Lindelöf:

$$\varphi_0(x) := c$$

$$\varphi_{k+1}(x) := c + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_k(t)) dt$$

Behauptung: (φ_k) konvergiert gleichmäßig gegen φ auf jedem kompaktem

Teilintervall $J \subset I$ mit $x_0 \in J$.

φ löst die DGL, $\varphi(x_0) = c$

Beweis: $K := \sup\{\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \mid x \in J\}$

$$\text{Induktion} \Rightarrow \|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \leq K \cdot \frac{L^k \cdot |x - x_0|^k}{k!} \quad \forall x \in J$$

$\Rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi$ gleichmäßig

Wie §10, Satz 3 (Picard-Lindelöf) folgt, dass φ die DGL löst.

$$\varphi(x_0) = c$$

J war beliebig, I läßt sich durch kompakte Intervalle

$J \subset I$ ausschöpfen.

Nach der Eindeutigkeit (1. Teil) sind die zugehörigen Lösungen Fortsetzungen voneinander.

\Rightarrow Lösung auf I existiert und ist eindeutig. \square

Satz 2: $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall
 $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ stetig
 $L_H =$ Menge der Lösungen $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der homogenen linearen
 Differentialgleichung $y' = A(x) \cdot y$
 Dann ist L_H ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.
 Für $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L_H$ ist äquivalent

- i) $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ \mathbb{K} -linear unabhängig
- ii) $\exists x_0 \in I: \varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig
- iii) $\forall x_0 \in I: \varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig

Beweis: a) Behauptung: L_H ist Teilvektorraum des Vektorraums der
 Funktionen $I \rightarrow \mathbb{K}^n$

i) $0 \in L_H$

ii) Sei $\varphi, \psi \in L_H$

Dann gilt $\varphi + \psi \in L_H$, denn

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)' &= \varphi' + \psi' = A(x)\varphi(x) + A(x)\psi(x) \\ &= A(x)(\varphi(x) + \psi(x)) \end{aligned}$$

iii) Sei $\varphi \in L_H$

Dann ist für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(\lambda\varphi) \in L_H, \text{ denn } (\lambda\varphi)' = \lambda\varphi' - \lambda A(x)\varphi(x) = A(x) \cdot \lambda\varphi(x)$$

b) Es gilt: iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)

Nach zu zeigen i) \Rightarrow iii)

Angenommen: $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sind linear unabhängig

Sei $x_0 \in I$. Wären $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0)$ linear abhängig, so gäbe es

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ mit } \lambda_1\varphi_1(x_0), \dots, \lambda_k\varphi_k(x_0) = 0$$

Betrachte: $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_k\varphi_k$

$$\Rightarrow \varphi \in L_H \text{ mit } \varphi(x_0) = 0$$

$$\text{auch } 0 \in L_H \text{ mit } \varphi(x_0) = 0$$

Aber: Lösung mit AB ist eindeutig.

Also: $\varphi = 0$ (als Funktionen)

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k \text{ linear unabhängig} \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k = 0 \quad \text{⚡ zu } \exists i: \lambda_i \neq 0$$