


- c) Zu zeigen:  $\dim L_H = n$   
 Sei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{K}^n$   
 Satz 1  $\Rightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H, \varphi_i(x_0) = e_i$   
 b)  $\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n$  linear unabhängig  
 $\Rightarrow \dim L_H \geq n$   
 Annahme:  $\psi_1, \dots, \psi_{n+1}(x_0) \in L_H$  linear unabhängig  
 b)  $\Rightarrow \psi_1(x_0), \dots, \psi_n(x_0) \in \mathbb{K}^n$  linear unabhängig  
  $\Rightarrow \dim L_H \leq n$

**Definition:** Ein **Fundamentalsystem von Lösungen** der DGL  $y' = A(x) \cdot y$  ist eine Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  des Vektorraums der Lösungen  $L_H$ .

Lösungen  $\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ \vdots \\ \varphi_{in} \end{pmatrix}$  in Matrix  $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nm} \end{pmatrix}$

Satz 2  $(\varphi_i)$  linear unabhängig  $\Leftrightarrow \exists x_0 \in I: \det \Phi(x_0) \neq 0$   
 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I: \det \Phi(x_0) \neq 0$

**Definition:**  $\det \Phi$  heißt die **Wronski-Determinante** des Fundamentalsystems  $\Phi$ .  
 Jede Lösung  $\varphi \in L_H$  lässt sich als Linearkombination der Basis schreiben:

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$$

$$\varphi = \Phi \cdot c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Man kann auch  $\Phi$  als Lösung auffassen:  
 $\Phi' = (\varphi_1', \dots, \varphi_n')$ ,  $A\Phi = (A\varphi_1, \dots, A\varphi_n)$   
 $\Rightarrow \Phi' = A\Phi$

**Beispiel:**  $w \in \mathbb{R}$ , DGL-System

$$\begin{cases} y_1' = -wy_2 \\ y_2' = wy_1 \end{cases} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Lösungen erraten:  $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos wx \\ \sin wx \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin wx \\ \cos wx \end{pmatrix}$

Für  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos wx & -\sin wx \\ \sin wx & \cos wx \end{pmatrix}$  gilt:  $\det \Phi(x) = 1 \neq 0$   
 $\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$  linear unabhängig

Wie kommt man auf  $\varphi_1, \varphi_2$  ?

Methode für  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  konstant

1-dimensional:  $y' = ay \Rightarrow y(x) = \exp(ax)$

n-dimensional:  $y' = Ay \Rightarrow y(x) = \exp(Ax) \quad A \in M(n \times n, \mathbb{K})$

Dabei:  $\exp(Ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ax)^k, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}$

Ausrechnen von  $\exp(Ax)$  :

1)  $A$  diagonalisieren

$$\det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} 1 & w \\ -w & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i \cdot w$$

Eigenvektoren:

$$\lambda = iw: \quad \ker \begin{pmatrix} iw & w \\ -w & iw \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda = -iw: \quad \ker \begin{pmatrix} -iw & w \\ -w & -iw \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Transformationsmatrix  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$A = T \begin{pmatrix} iw & 0 \\ 0 & -iw \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \exp(Ax) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ax)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( T \begin{pmatrix} iw & 0 \\ 0 & -iw \end{pmatrix} T^{-1} x \right)^k \\ &= T \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (iwx)^k & 0 \\ 0 & (-iwx)^k \end{pmatrix} \right) \cdot T^{-1} \\ &= T \cdot \begin{pmatrix} \exp(iwx) & 0 \\ 0 & \exp(-iwx) \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos wt & -\sin wt \\ \sin wt & \cos wt \end{pmatrix} = \Phi \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

## Inhomogene lineare DGL

**Satz 3:**  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ ,  $b: I \rightarrow \mathbb{K}_n$  stetig.

$L_H =$  Vektorraum der Lösung  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  von  $y' = A(x)y$

$L_I =$  Menge der Lösungen  $\psi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  von  $y' = A(x)y + b(x)$

Dann gilt für beliebiges  $\psi_0 \in L_I$ :  $L_I = \psi_0 + L_H$

Mit anderen Worten:

Man erhält die allgemein Lösung der inhomogenen DGL als Summe einer speziellen Lösungen der inhomogene DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL.

**Beweis:** a)  $L_I \subseteq \psi_0 + L_H$

Sei  $\psi \in L_I$ ,  $\varphi = \psi - \psi_0$

$$\varphi' = \psi' - \psi_0' = A(x)\psi + b(x) - A(x)\psi_0 - b(x) = A(x)(\psi - \psi_0)$$

$$= A(x)\varphi \Rightarrow \varphi \in L_H$$

$$\Rightarrow \psi \in \psi_0 + L_H$$

b)  $L_I \supseteq \psi_0 + L_H$

Sei  $\psi \in \psi_0 + L_H$ , d.h.  $\psi = \psi_0 + \varphi$ ,  $\varphi \in L_H$

$$\psi' = \psi_0' + \varphi' = A(x)\psi_0 + b(x) + A(x)\varphi = A(x)(\psi_0 + \varphi) + b(x)$$

$$= A(x)\psi + b(x)$$

$$\Rightarrow \psi \in L_I \quad \square$$

**Satz 4:** (Variation der Konstanten)

Bezeichnungen wie in Satz 3

Sei  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ein Fundamentalsystem der homogenen DGL  $y' = A(x)y$ .

Man erhält eine Lösung  $\psi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  der inhomogenen DGL

$y' = A(x)y + b(x)$  durch den Ansatz  $\psi(x) = \Phi(x)U(x)$ , wobei

$U: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  differenzierbar mit  $\Phi(x)U'(x) = b(x)$ , d.h.

$$U(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt + C$$

**Beweis:** Ansatz:  $\psi = \Phi U$

$$\Rightarrow \psi' = \Phi'U + \Phi U'$$

$$\Rightarrow \psi' = A\Phi U' + \Phi U'$$

$$A\psi + b = A\Phi U + b$$

$$\text{Also: } \psi' = A\psi + b \Leftrightarrow \Phi U' = b \quad \square$$

Beispiel:  $y_1' = -y_2$  bzw.  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$   
 $y_2' = y_1 + x$

Letztes Beispiel:  $\Phi = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ ,  $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$   
 $\Phi^{-1} \cdot (b) = \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}$ ,  $U(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} dt + C$

Etwa:  $U(x) = \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \psi(x) = \Phi(x)U(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  allgemeine Lösung  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$

des inhomogenen Systems. ( $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ )

## Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

**Definition:**  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  stetige Funktionen.

Dann heißt  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  (1)  
**homogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung.**

Ist außerdem  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig, so heißt  
 $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$  (2)

**inhomogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung.**

**Satz 5:** Bezeichnungen wie oben.

a) Sei  $L_H$  die Menge der Lösungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  der homogenen Gleichung (1).  
 Dann ist  $L_H$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

b) Sei  $L_H$  die Menge der Lösungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  der inhomogenen Gleichung (2).  
 Dann gilt für beliebiges  $\psi_0 \in L_h$ :  $L_I = \psi_0 + L_H$

c) Ein  $n$ -Tupel  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$  von Lösungen von (1) ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle)  $x \in I$

die Wronski-Determinante  $W(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

verschieden von Null ist.

**Beweis:** Reduktion wie in § 10 vorgeführt auf ein inhomogenes lineares GL-System 1. Ordnung.

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = -(a_0(x)y_0 + a_1(x)y_1 + \dots + a_{n-1}(x)y_{n-1}) + b(x) \end{array} \right.$$

Jede Lösung von (2) entspricht einer Lösung von (3) n.n.

Genauso für homogene DGL.

Alle Behauptungen folgen aus den Sätzen (2),(3)  $\square$

**Beispiel:**  $y'' + 2y' + y = 0$  auf  $I = \mathbb{R}$

2 Lösungen:

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \quad \varphi_2(x) = x \cdot e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1'(x) = -e^{-x} \\ \varphi_2''(x) = e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow e^{-x} + 2(-e^{-x}) + e^{-x} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_2'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} \\ \varphi_2''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x \cdot e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow -2e^{-x} + x \cdot e^{-x} + 2(e^{-x} - x \cdot e^{-x}) + x e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2 \in L_H$$

Frage:  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = L_H$ ? (d.h. spannen  $\varphi_1, \varphi_2$  ganz  $L_H$  auf:  $\text{span}(\varphi_1, \varphi_2) = L_H$ )

Wronski-Determinante:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & x \cdot e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot e^{-2x} + e^{-2x} - x \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \neq 0$$

$\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$  bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen

$\Rightarrow$  allgemeine Lösung:  $\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x \cdot e^{-x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$

## Lineare DGLen 2. Ordnung und spezielle Polynome

Wir betrachten 3 DGLen mit polynomialen Lösungen. Es sei  $n \in \mathbb{N}$ .

1) Legendresche DGL

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (-1 < x < 1)$$

Legendre-Polynome

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \cdot \left( \frac{d}{dx} \right)^n \cdot (x^2 - 1)^n$$

$$\deg P_n = n$$

## 2) Hermiteische DGL

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (y \in \mathbb{R})$$

Hermiteische Polynome

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

$$\deg H_n = n$$

## 3) Lagnerrische DGL

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (x > 0)$$

Lagnerrische Polynome

$$L_n(x) := e^x \cdot \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x})$$

$$\deg L_n = n$$

Die angegebenen Polynome lösen die jeweilige DGL:

Für (2) zu zeigen:  $y := e^{x^2} D^n e^{-x^2}$  löst  $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

$$e^{-x^2} y = D^n e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow D^2 (e^{-x^2} y) = D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1} D e^{-x^2}$$

$$= D^{n+1} (-2x \cdot e^{-x^2}) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} -2xD^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1)D^n e^{-x^2}$$

$$= -2xD(e^{-x^2} y) - 2(n+1)e^{-x^2} y$$

$$= e^{-x^2} (4x^2 y - 2xy' - 2(n+1)y)$$

Andererseits:

$$D^2 (e^{-x^2} y) = e^{-x^2} y'' + 2(D e^{-x^2}) y' + (D^2 e^{-x^2}) y = e^{-x^2} (y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y)$$

Vergleich:  $\Rightarrow y'' - 2xy' + 2ny = 0$   $\square$