§ 10 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Bezeichnung: $\mathbb{C}[T] := \{a_n T^n + \ldots + a_1 T + a_0 \,|\, a_\nu \in \mathbb{C},\ \nu = 0,\ldots,n\}$ =Polynomring n-ter Ordnung

Definition: Sei $P \in \mathbb{C}[T]$ und $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$

$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0$ heißt **Differentialoperator** n-ter Ordnung, falls $a_n \neq 0$.

Bezeichnung: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$\mathcal{C}^k[I] = \mathbb{C}$-Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$

Ist $P \in \mathbb{C}[T]$ Polynom vom Grad n und $k \geq n$, so ist

$$P(D): \begin{cases} \mathcal{C}^k[I] \to \mathcal{C}^{n+k}[I] \\ f \mapsto P(D)(f) := a_n D^n + \ldots + a_1 Df + a_0 \end{cases} \text{ eine Abbildung}$$

Eine Abbildung von Funktionenräumen nennt man einen **Operator**.

Ist $P \in \mathbb{C}[T]$ ein normiertes Polynom n-ter Ordnung, d.h. mit höchstem Koeffizienten 1, so ist

$$P(D)\,y = \begin{cases} 0 & \text{eine homogene} \\ f(x) & \text{eine inhomogene} \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{lineare DGL } n-\text{ter Ordnung} \\ \text{mit konstanten Koeffizienten.} \end{matrix}$$

Lemma 1: Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[T]$

a) Ist $P(T) = P_1(T) + P_2(T)$, so ist für jede hinreichend oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f$

b) Ist $Q(T) = P_1(T)P_2(T)$, so ist für jede hinreichend oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $Q(D)f = P_1(D)\left(P_2(D)f\right)$

Beweis: Sei $P_1(T) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu T^\nu$, $P_2(T) := \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu T^\nu$

a) $P(T) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu + b_\nu) T^\nu$ Œ$m = n$

$$\Rightarrow P(D)f = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu + b_\nu) D^\nu f = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu D_\nu f + \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu D^\nu f =$$
$$= P_1(D)f + P_2(D)f$$

b) $Q(T) = \sum_{\mu=0}^{m+n} c_\mu T^\mu$ mit $c_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu b_{\mu-\nu}$

$$\text{Dabei ist} \begin{cases} a_\nu = 0 & \text{für } \nu > \mathrm{n} \\ \mathrm{b}_\nu = 0 & \text{für } \nu > \mathrm{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(D)f = \sum_{k=0}^{n+m} c_k D^k f = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}\right) D^k f =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) D^{i+j} f = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i D^i\left(b_j D^j f\right)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i D^i\left(\sum_{j=0}^{m} b_j D^j f\right) = P_1(D)P_2(D)f \qquad \left(= P_1(D)\left(P_2(D)(f)\right)\right)$$

Bemerkung: b) gilt nur für Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten.

Beweis: Aus b) folgt: $P_1(D_1)P_2(D_2)(f) = P_2(D_2)P_1(D_1)(f)$
Aber: Das gilt nicht für $L_1 = D,\ L_2 = x \cdot D$,
d.h. $L_2 L_1 f \neq L_1 L_2 f$

Beweis:
$$L_2(L_1 f) = L_2(Df) = x \cdot D^2 f$$
$$L_1(L_2 f) = L_1(x \cdot Df) = Df + x \cdot D^2 f$$

Lemma 2: Für jedes $P \in \mathbb{C}[T]$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$

Beweis: a) Behauptung: $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Beweis: Sei $\lambda = \mu + iw \quad \mu, w \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda x} = e^{\mu x}\left(\cos(\omega) + i\sin(\omega x)\right)$$

$$\Rightarrow D\left(e^{\lambda x}\right) = D\left(e^{\mu x}\cos(\omega x) + iD\left(e^{\mu x}\sin(\omega x)\right)\right)$$

$$= \mu e^{\mu x}\cos(\omega x) + we^{\mu x}\sin(\omega x) + i\left(\mu e^{\mu x}\sin(\omega x) + \omega e^{\mu x}\cos(\omega x)\right)$$

$$= (\mu + i\omega)e^{\mu x}\left(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\right) = \lambda e^{\lambda x}$$

b) Sei $P(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{C}[T]$

$$\Rightarrow P(D)e^{\lambda x} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i\left(e^{\lambda x}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

Korollar: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $P(T)$ (d.h. $P(\lambda) = 0$),
so ist $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL $P(D)y = 0$.

Satz 3: Das Polynom $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ habe n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_n, \ldots, \lambda_1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Die Funktionen $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto x^{\lambda_k x} \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, n)$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0$

Beweis: Nach Korollar sind φ_k Lösungen.

Zu zeigen: $\{\varphi_1,...,\varphi_k\}$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$

$$W(0)=\det\begin{pmatrix}\varphi_1(0) & \cdots & \varphi_n(0)\\ \varphi_1'(0) & & \varphi_n'(0)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(0)\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 0} & \cdots & e^{\lambda_n 0}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{(n-1)}e^{\lambda_1 0} & \cdots & \lambda_n^{(n-1)}e^{\lambda_n 0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{(n-1)} & \cdots & \lambda_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

Beispiel: $y^{(4)}-2y^{(3)}-y^{(2)}+2y'=0$

Gut anscheuen!!!
So eine Aufgabe, wie das Beispiel 1, kommt in der Klausur dran!

$\Leftrightarrow P(D)y=0$ mit $P(T)=T^4-2T^3-T^2+2T$

$P(T)$ hat die Nullstellen $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1,\ \lambda_4=2$

$\Rightarrow \varphi_1(x)=1,\ \varphi_2(x)=e^x,\ \varphi_3(x)=e^{-x},\ \varphi_4(x)=e^{2x}$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Beispiel: $y''+\omega y=0\quad \left(\omega\in\mathbb{R}_+^*\right)$ (- DGL der ungedämpfter Schwingung mit Frequenz ω.)

$\Leftrightarrow P(D)y=0\quad$ mit $P(T)=T^2+\omega^2$

$P(T)$ hat die Nullstellen $\lambda_1=i\omega,\ \lambda_2=-i\omega$

$\Rightarrow \varphi_1(x)=e^{i\omega x},\ \varphi_2(x)=e^{-i\omega}$ bilden Fundamentalsystem

Ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen erhält man durch geeignete Linearkombination.

$$\psi_1(x)=\frac{1}{2}(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega x}+e^{-1\omega x}\right)=\cos(\omega x)$$

$$\psi_2=\frac{1}{2i}(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}\right)=\sin(\omega x)$$

Die Übergangsmatrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$ ist invertierbar

$\Rightarrow\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ist reelles Fundamentalsystem

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom n-ten Grades $P(T)=T^n+a_{n-1}T^{n-1}+...+a_1T+a_0\in\mathbb{C}[T]$ besitzt genau n Nullstellen und Vielfachheiten,
d.h. $P(T)=(T-\lambda_1)^{k_1}(T-\lambda_2)^{k_2}\cdots(T-\lambda_r)^{k_r}$
mit paarweise verschiedenen $\lambda_1,...,\lambda_r$, $\sum_{i=1}^{r}k_i=n$ und $k_i\geq 1\ \forall i$.

Beweis: (Vgl. Funktionentheorie)

Lemma 4: Sei $\lambda \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}, f \in C^k(I)$

$$\Rightarrow (D-\lambda)^k\left(f(x)e^{\lambda x}\right) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

Beweis: (Induktion nach k)

I. $k=0$ (klar)

II. $k-1 \rightsquigarrow k$:

$$\begin{aligned}
(D-\lambda)^k\left(f(x)e^{\lambda x}\right) &\overset{\text{L1}}{=} (D-\lambda)(D-\lambda)^{k-1}\left(f(x)e^{\lambda x}\right)\\
&\overset{\text{IV}}{=} (D-\lambda)\left(f^{(k-1)}e^{\lambda x}\right)\\
&\overset{\text{L1}}{=} D\left(f^{(k-1)}e^{\lambda x}\right) - \lambda\left(f^{(k-1)}e^{\lambda x}\right)\\
&= f^{(k)}e^{\lambda x} + f^{(k-1)}\lambda e^{\lambda x} - \lambda f^{(k-1)}e^{\lambda x}\\
&= f^{(k)}e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

Lemma 5: Sei $P \in \mathbb{C}[T],\ \lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) \neq 0,\ g \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad k

$$\Rightarrow P(D)\left(g(x)e^{\lambda x}\right) = h(x)\cdot e^{\lambda x}$$

mit einem Polynom $h \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad k.

Beweis: Ordne das Polynom nach Potenzen von $T-\lambda$

$$P(T) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (T-\lambda)^\nu \quad c_\nu \in \mathbb{C}$$

Da $P(\lambda) \neq 0$, ist $c_0 \neq 0$

$$\text{Lemma 4} \Rightarrow P(D)\left(g(x)e^{\lambda x}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (D-\lambda)^\nu\left(g(x)e^{\lambda x}\right)$$

$$\overset{\text{L4}}{=} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g^{(x)}(x)e^{\lambda x} =: h(x)e^{\lambda x}$$

wegen $c_0 \neq 0$ ist $\deg h = k$.

Satz 6: Sei $P(T) = (T-\lambda_1)^{k_1}\cdots(T-\lambda_r)^{k_r}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j\quad \forall i,j$ und $k_i \geq 1\ \ \forall i$

$\Rightarrow$ Die DGL $P(D)y = 0$ *(1)* hat Fundamentalsystem von Lösungen:

$$\varphi_{jm}(x) = x^m e^{\lambda_j x} \text{ für } \begin{cases} j = 1,\dots,r \\ 0 \leq m \leq k_j - 1 \end{cases}$$

Beweis: a) Alle φ_{jm} lösen *(1)*

Beweis: Sei $P(T) = Q_j(T)\cdot(T-\lambda_j)^{k_j}$ mit $Q_j \in \mathbb{C}[T]$

$$P(D)\,y_{jm}(x) = Q_j(D)(D-\lambda_j)^{k_j}\left(x^m e^{\lambda_j x}\right) \overset{\text{L4}}{=} Q_j(x)\underbrace{\left(x^m\right)^{(k_j)}}_{=0 \text{ da } k_j > m} e^{\lambda_j x} = 0$$

b) Die φ_{jm} sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$

Beweis: Angenommen: $0=\sum_{j=1}^{r}\underbrace{\sum_{m=0}^{k_j-1}c_{jm}x^m}_{g_j(x)}e^{\lambda_j x}=\sum_{j=1}^{r}g_j(x)e^{\lambda_j x}$

Zu zeigen: $g_j=0 \quad \forall j$

Beweis: (Induktion nach r)

I. $r=1$:

$g_1(x)e^{\lambda x}=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g_1=0$

II. Sei $\sum_{j=1}^{r}g_j(x)e^{\lambda_j x}=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Ist einer der $g_j\equiv 0$, dann fertig (nach IV)

Andernfalls wende den Differentialoperator $(D-\lambda_r)^{k_r}$ an:

$$0=(D-\lambda_r)^{k_r}\left(\sum_{j=1}^{r}g_j(x)e^{\lambda_j x}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{r-1}(D-\lambda_r)^{k_r}\left(g_j(x)e^{\lambda_j x}\right)+\underbrace{(D-\lambda_r)^{k_r}\left(g_r(x)e^{\lambda_r x}\right)}_{=0\,(\mathrm{L}4)}$$

$$\overset{\mathrm{L}5}{=}\sum_{j=1}^{r-1}h_j(x)e^{\lambda_j x}$$

wobei die $h_j(x)$ Polynome sind, die nicht identisch verschwinden $\Rightarrow \lightning$ zu IV