Definition: Sei ($\mathbb{X}$,d) metrischer Raum, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ Teilmenge $x \in \mathbb{X}$ heißt **Randpunkt** von $\mathbb{Y}$ $:\Leftrightarrow$ in jeder Umgebung von x liegt sowohl ein Punkt von $\mathbb{Y}$ als auch ein Punkt von $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

Bezeichnung: $\delta\mathbb{Y} :=$ Menge von Randpunkten von $\mathbb{Y}$.

Beispiel: $\mathbb{Y} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| \le 1 \right\}$ abgeschlossene Einheitskugel

$\Rightarrow \delta\mathbb{Y} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$ Einheitssphäre (Kugeloberfläche)

$\mathring{\mathbb{Y}} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x\| < 1 \right\}$ offene Einheitskugel

$\delta\mathring{\mathbb{Y}} = \delta\mathbb{Y}$

Satz 4: Sei ($\mathbb{X}$,d) metrischer Raum und $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$.
- (i) $\mathbb{Y} \setminus \delta\mathbb{Y}$ ist offen
- (ii) $\mathbb{Y} \cup \delta\mathbb{Y}$ ist abgeschlossen
- (iii) $\delta\mathbb{Y}$ ist abgeschlossen

Sei $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ euklidische Norm $\|.\|$.

Sei $(\mathbb{X}, d)$ beliebiger metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Punkten von $\mathbb{X}$.

Definition: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x \in \mathbb{X} :\Leftrightarrow$ zu jeder Umgebung U von x $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass

$x_n \in U \quad \forall n \ge N$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; d(x_n, x) < \varepsilon \;\; \forall n \ge N$

Satz 5: Für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$ sind äquivalent:

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \overset{\exists}{=} x = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_\nu} \overset{\exists}{=} \overline{x}_\nu \qquad \forall \nu = 1, \dots, n$

Beweis: $(1) \Rightarrow (2)$: Sei $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \overset{\exists}{=} x$

d.h.: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, s.d. $\|x_k - \overline{x}\| < \varepsilon \quad \forall k \ge N$

Nun ist $\left|x_{k_\nu} - \overline{x}_\nu\right| \le \|x_k - \overline{x}\| \left(= \sqrt{(x_{k_1} - \overline{x}_1)^2 + \dots + (x_{k_n} - \overline{x}_n)^2} \right)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$, s.d. $\left|x_{k_\nu} - \overline{x}_\nu\right| < \varepsilon \quad \forall k \ge N \qquad \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$: Sei $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_\nu} \overset{\exists}{=} \overline{x}_\nu \quad \forall \nu = 1, \dots, n$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\nu \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } \left| x_{k_\nu} - \overline{x}_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k \geq N_\nu$

Sei $N := \max(N_1, \ldots, N_n)$

$$\Rightarrow \forall k \geq N \text{ ist } \left\| x_k - \overline{x} \right\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \left| x_{k_\nu} - \overline{x}_\nu \right|^2} < \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon \qquad \Rightarrow (1)$$

Satz 6: Für eine Teilmenge $\mathbb{A}$ eines metrischen Raumes $\mathbb{X}$ sind äquivalent:

(i) $\mathbb{A}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{X}$

(ii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n \in \mathbb{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x \in \mathbb{X} \qquad \Rightarrow x \in \mathbb{A}$

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii) Sei $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x \in \mathbb{X}$.

z.Z.: $x \in \mathbb{A}$

Angenommen: $x \notin \mathbb{A}$. Da $\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$ offen $\Rightarrow \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$ ist Umgebung von $\mathbb{X}$.

Nach Defintion der Konvergenz $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{s.d.} \quad x_n \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{A} \quad \forall k > N$ $\lightning$

(ii)$\Rightarrow$(i) Angenommen (ii) gilt.

z.Z.: $\mathbb{A}$ abgeschlossen

Sei $x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$ (irgendein Punkt)

Falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \mathbb{A} \neq \varnothing$

So können wir zu jedem $k \geq 1$ ein $x_k \in \mathbb{A}$ finden mit $d(x_k, x) < \frac{1}{k}$

Dafür gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \overset{\exists}{=} x$ Nach (ii) ist $x \in \mathbb{A}$ ($\lightning$ zu $x \notin \mathbb{A}$)

$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0$ mit $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \mathbb{A} = \varnothing$

d.h. $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \subset \mathbb{X} \setminus \mathbb{A} \quad \Rightarrow \mathbb{X} \setminus \mathbb{A}$ offen, d.h. $\mathbb{A}$ abgeschlossen

Definition: Eine Folge von Punkten $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eines metrischen Raumes $\mathbb{X}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, s.d. $\quad d(x_k, x_l) < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq N$.

Proposition 7: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in x $\Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist C-Folge

Beweis: Sei $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \overset{\exists}{=} x$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, s.d. $d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$

$\Rightarrow \forall k, l \geq N$ ist $d(x_k, x_l) \leq d(x_k, x) + d(x, x_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Definition: Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn in ihm jede C-Folge konvergiert.

Satz 8: $\mathbb{R}^n$ ist vollständig

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein C-Folge in $\mathbb{R}^n$, $x_k = \left(x_{k_1},\dots,x_{k_n}\right)$

Da $\left|x_{k_\nu} - x_{l_\nu}\right| \le \left\|x_k - x_l\right\| \quad \forall \nu = 1,\dots,n$

Ist auch $\left(x_{k_\nu}\right)_{k_\nu\in\mathbb{N}}$ ein C-Folge $\forall \nu = 1,\dots,n$

Wiederholung: $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{k_\nu} \exists \forall \nu = 1,\dots,n$

$\Rightarrow$ Satz 5 $\Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}^n$

Definition: Für $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ setze:

$$\operatorname{diam}(\mathbb{A}) := \sup\left\{d(x,y)\,\middle|\,x,y \in \mathbb{A}\right\}$$

=Durchmesser von $\mathbb{A}$

$\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ beschränkt:$\Leftrightarrow \operatorname{diam}(\mathbb{A}) < \infty$

Schachtelungsprinzip: $\mathbb{X}$ = vollständiger metrischer Raum.

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ Folge abgeschlossener, nichtleerer Teilmengen von $\mathbb{X}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam}(A_k) = 0$

$\Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{X} \quad$ mit $\quad x \in A_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Beweis: I) **Eindeutigkeit von x:** Sei x' ein weiterer solcher

$\Rightarrow d(x,x') > 0 \Rightarrow x, x'$ nicht in allen A_k $\lightning$

II) **Existenz:** Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A_n$

Da $d(x_m, x_n) \le \operatorname{diam}(A_N) \quad \forall m,n \ge N$,

ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine C-Folge in $\mathbb{X}$.

$\mathbb{X}$ ist vollständig $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x$

Da $x_n \in A_k \quad \forall n \ge k$, folgt aus Satz 6:

$\Rightarrow x \in A_n \quad \forall n \ge k$

$\Rightarrow$ Erst recht $x \in A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definition: Eine Abbildung $f: X \to Y$ metrischer Räume heißt **stetig** in $x_0 \in \mathbb{X}$,

falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\exists}{=} f(x_0)$

d.h. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{\exists}{=} f(x_0)$$

f heißt stetig auf $\mathbb{X} \Leftrightarrow f$ ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{X}$ stetig.

Satz 9: Seien $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$, $g:\mathbb{Y}\to\mathbb{Z}$ Abbildungen metrischer Räume und $x_0\in\mathbb{X}$
Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0=f(x_0)$
$\Rightarrow g\circ f:\mathbb{X}\to\mathbb{Z}$ ist stetig in x_0.

Beweis: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x_0$

Da f stetig in $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{\exists}{=} f(x_0)=y_0$

Da g stetig in $y_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) \overset{\exists}{=} g(y_0)=g(f(x_0))$

$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n) \quad = \quad (g\circ f)(x_0)$$

Beispiele: $"+"\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x+y\end{cases}$ $"\bullet"\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x\bullet y\end{cases}$ $"\div"\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto \dfrac{x}{y}\end{cases}$

sind stetige Abbildungen.

Beweis: Sei $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) \overset{\exists}{=} (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Satz 5 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \overset{\exists}{=} y$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \overset{+}{\underset{\div}{\bullet}} \lim_{n\to\infty} y_n \overset{\exists}{=} x \overset{+}{\underset{\div}{\bullet}} y$$ nach Satz aus Analysis I

Satz 10: Seien $f,g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen auf metrischen Raum $\mathbb{X}$.
$\Rightarrow f+g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}\qquad f\bullet g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ stetig
Ist $g(x)\neq 0\quad \forall x\in\mathbb{X}\Rightarrow \dfrac{f}{g}:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ stetig

Beweis: Satz 5 $\Rightarrow (f,g):\exists\mathbb{X}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ stetig

$$\left.\begin{aligned} f+g &= "+"\circ(f,g)\\ f\cdot g &= "\cdot"\circ(f,g)\\ \frac{f}{g} &= "\div"\circ(f,g)\end{aligned}\right\}\text{Beispiel und Satz 9}\Rightarrow\text{Behauptung}$$