§ 12 Riemann integrierbare Funktionen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und $\varnothing\neq M\subset[a,b]$

Definition: $\omega_f(M):=\sup_{x\in M} f(x)-\inf_{x\in M} f(x)=$ **Oszillation von *f* auf *M***

Sei nun $x_0\in[a,b]$ fest

Für $\delta>0$ ist $K_\delta(x_0)=\{x\in\mathbb{R}\,\|\,x-x_0|<\delta\}$

$$\Rightarrow \text{Die Funktion} \begin{cases}(0,\infty)\to\mathbb{R}\\ \delta\mapsto\omega_f\left(K_\delta(x_0)\cap[a,b]\right)\end{cases}$$

ist monoton wachsend und beschränkt

$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0^+}\omega_f\left(K_\delta(x_0)\cap[a,b]\right)$ existiert und ist Zahl ≥ 0

Definition: $\omega_f(x_0):=\lim_{\delta\to 0^+}\omega_f\left(K_\delta(x_0)\cap[a,b]\right)$ heißt **Oszillation von *f* in x_0**

> Satz 1: Für beschränkte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $x_0\in\mathbb{R}$ sind äquivalent:
> 1) f ist stetig in x_0
> 2) $\omega_f(x_0)=0$

Beweis: 1)$\Rightarrow$2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, so dass $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in K_\delta(x_0)\cap[a,b]$

$\forall x,y\in K_\delta(x_0)\cap[a,b]$ ist

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(x_0)|+|f(y)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Rightarrow\omega_f\left(K_\delta(x_0)\cap[a,b]\right)\leq\varepsilon$

$\Rightarrow\omega_f(x_0)\leq\varepsilon$

Da das $\forall\varepsilon>0$ gilt, folgt $\omega_f(x_0)=0$

2)$\Rightarrow$1) Sei $\omega_f(x_0)=0$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, so dass $\omega_f\left(K_\delta(x_0)\cap[a,b]\right)<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall x\in K_\delta(x_0)\cap[a,b]$ ist $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,

d.h. f in x_0 stetig $\square$

Sei $U(f):=\{x\in[a,b]\,|\,f \text{ unstetig in } x_0\}$

$\forall\varepsilon>0$ sei $U_\varepsilon(f):=\{x\in[a,b]\,|\,\omega_f(x)\geq\varepsilon\}$

Satz 1 $\Rightarrow U(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_{\frac{1}{n}}(f)$ ☆

Satz 2: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $\varepsilon>0$
$\Rightarrow U_\varepsilon(f)$ kompakt

☆ $\Rightarrow$

Korollar: Für jede beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist $U(f)$ abzählbare Vereinigung Kompakter Mengen.

Beweis: (von Satz 2)

Satz von Heine-Borel:
$M\subset\mathbb{R}$ kompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen
Da $M_\varepsilon(f)\subset[a,b]$, ist $M_\varepsilon(f)$ beschränkt.
Zu zeigen: $M_\varepsilon(f)$ abgeschlossen
Genügt zu zeigen: $[a,b]\setminus U_\varepsilon(f)$ offen

Sei $x_0\in[a,b]\setminus U_\varepsilon(f) \;\Rightarrow\; \omega_f(x_0)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ Für hinreichend kleines $\delta>0$ ist $\omega_f\left(K_\delta(x_0)\cap[a,b]\right)<\varepsilon$

$\Rightarrow \omega_f(x)<\varepsilon \quad \forall x\in K_\delta(x_0)\cap[a,b]$

d.h. $K_\delta(x_0)\cap[a,b]\subset[a,b]\setminus U_\varepsilon(f)$

also $[a,b]\setminus U_\varepsilon(f)$ offen $\square$

Definition: $M\subset\mathbb{R}$ heißt **Nullmenge** oder **Menge vom Maß 0**, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ höchstens abzählbar viele Intervalle I_ν gibt mit

1) $M\subseteq\bigcup_\nu I_\nu$
2) $\sum_\nu |I_\nu|<\varepsilon$

Hierbei ist $|I_\nu|$ die Länge des Intervalls I_ν, also $|I_\nu|=b-a$, falls $I_\nu=(a,b)$, $I_\nu=[a,b]$, $I_\nu=(a,b]$,...

Lemma 3: $M\subset\mathbb{R}$ endlich oder abzählbar
$\Rightarrow M$ ist Nullmenge

Beweis: Œ $M=\{x_1,x_2,x_3,...\}$

$$x_\nu\in I_\nu=\left(x_\nu-\frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}},x_\nu+\frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}\right)$$

$$\Rightarrow |I_\nu|=\frac{\varepsilon}{2^\nu}$$

$$\Rightarrow M\subset\bigcup_{\nu=1}^{\infty}I_\nu \text{ mit } \sum_{\nu=1}^{\infty}|I_\nu|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^\nu}=\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}}_{\text{geometrische Reihe}}=\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2=\varepsilon \quad \square$$

Lemma 4: $M_\nu \subset \mathbb{R}$ Nullmenge $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \text{ ist Nullmenge}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$

Da M_ν Nullmenge, kann man M_ν mit abzählbar vielen Intervallen I_{ν_k} $(k \in \mathbb{N})$ überdecken mit $\sum_{k=1}^{\infty} \left|I_{\nu_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2^\nu}$

$\Rightarrow \left\{I_{\nu_k} \middle| \nu \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\right\}$ sind abzählbar viele Intervalle die $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ überdecken mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|I_{\nu_k}\right| < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \quad \square$$

Lemma 5: Für kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:
1) K ist Nullmenge
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ endlich viele Intervalle $I_1, \dots, I_n$ mit $K \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$ mit $\sum_{\nu=1}^{n} \left|I_\nu\right| < \varepsilon$

Beweis: $2) \Rightarrow 1)$ trivial
(endlich viele Intervalle $\triangleq$ höchstens abzählbar viele Intervalle
[Def. Nullmenge] $\Rightarrow K$ ist Nullmenge)

$1) \Rightarrow 2)$ Nach Definition $\exists$ (offene) Intervalle

J_ν mit $K \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} J_\nu$ und $\sum_{\nu} \left|J_\nu\right| < \varepsilon$

Da K kompakt $\Rightarrow \exists$ endlich viele $J_{\nu_1}, \dots, J_{\nu_n}$

mit $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_{\nu_k}$ und $\sum_{k=1}^{n} \left|J_{\nu_k}\right| < \varepsilon \quad \square$

Definition: $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **fast überall stetig**,
falls $U(f) := \left\{x \in I \middle| f \text{ nicht stetig in } x\right\}$ ist Nullmenge.

Lebesgnesche Integrabilitätskriterium
Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:
1) f ist auf $[a,b]$ (Riemann-)integrierbar
2) f ist beschränkt und fast überall stetig

Beweis: $2) \Rightarrow 1)$ Sei $\left|f(x)\right| \le c \quad \forall x \in [a,b]$ und $U(f) =$ Nullmenge
Sei $\varepsilon > 0$
Zu zeigen: $\exists$ Treppenfunktion $\varphi \ge f$ und $\psi \le f$ auf $[a,b]$, so dass

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{dx} < \varepsilon$$

$U(f) = \text{Nullmenge} \Rightarrow \exists$ abzählbar viele offene Intervalle $J_1, J_2, J_3, \ldots$ mit

i) $U(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{J_i}$

ii) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\overline{J_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{c}$ $\star$

Zu jedem Punkt $x \in [a,b] \setminus U(f)$ ist f stetig

Satz $1 \Rightarrow \exists$ offenes Intervall K_x mit $x \in K_x$ und $\omega_f\left(\overline{K_x}\right) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $\star\star$

$\left\{J_\nu, K_x \,\middle|\, \nu \in \mathbb{N}, x \in [a,b] \setminus U(f)\right\}$ ist offene Überdeckung von $[a,b]$

Da $[a,b]$ kompakt $\Rightarrow \exists \nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}$, $\exists x_1, \ldots, x_s \in [a,b] \setminus U(f)$, so dass

$$[a,b] \subset J_{\nu_1} \cup \ldots \cup J_{\nu_r} \cup K_{x_1} \cup \ldots \cup K_{x_s}$$

Wähle Zerlegung $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$ so fein, dass jedes Teilintervall $I_\nu = (t_k, t_\nu)$ in einem Intervall $J_{\nu_1}, \ldots, J_{\nu_r}, K_{x_1}, \ldots, K_{x_s}$ enthalten ist.

Sei $M_\nu := \sup_{x \in I_\nu} f(x)$, $m_\nu := \inf_{x \in I_\nu} f(x)$

$$\Rightarrow \varphi : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} M_\nu & x \in I_\nu \quad \forall \nu \\ \text{groß genug} & x = t_\nu \quad \forall \nu \end{cases} \end{cases}$$

ist Treppenfunktion mit $\varphi \geq f$

$$\psi : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \psi(x) = \begin{cases} m_\nu & x \in I_\nu \quad \forall \nu \\ \text{klein genug} & x = t_\nu \quad \forall \nu \end{cases} \end{cases}$$

ist Treppenfunktion mit $\psi \leq f$

d.h. $\varphi \leq f \leq \psi$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi(x) - \int_a^b \varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu |I_\nu| - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |I_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)|I_\nu| =: A + B$$

mit $A = \sum_{I_k \subset \text{einem } J_\nu} (M_k - m_k)|I_k|$ und $B = \sum_{I_k \subset \text{einem } K_{x_\nu}} (M_k - m_k)|I_k|$

$$\overset{\star}{\Rightarrow} A := \sum_{I_k \subset J_\nu} |M_k - m_k||I_k| \leq \sum_{I_k \subset J_\nu} (c - (-c))|I_k| = 2c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{\star\star}{\Rightarrow} B = \sum_{I_k \subset K_{x_\nu}} (M_k - m_k)|I_\nu| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{I_k \subset K_{x_\nu}} |I_k| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{dx} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$1) \Rightarrow 2)$ folgt aus Lemma 6 und Lemma 7

Lemma 6: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar
$\Rightarrow f$ beschränkt

Beweis: f integrierbar $\Rightarrow \exists \varphi$ Treppenfunktion auf $[a,b]$ mit $f \leq \varphi$
Treppenfunktionen haben nur endlich viele Werte, sind also beschränkt.

Lemma 7: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar
$\Rightarrow M(f) = \text{Nullmenge}$