Beweis: Hatten gesehen $M(f) := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\frac{1}{n}}(f)$, wobei $M_{\frac{1}{n}}(f) = \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, \omega_f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$

Lemma 4 $\Rightarrow$ Genügt zu zeigen: $U_{\frac{1}{n}}(f)$ ist Nullmenge $\forall n$

Œ $M_{\frac{1}{n}}(f) \neq \varnothing$

Sei $\varepsilon > 0$

Zu zeigen: $\exists$ abzählbar viele Intervalle, die $M_{\frac{1}{n}}(f)$ überdecken, so dass die Summe über ihre Länge kleiner als ε ist.

Da f integrierbar, $\exists$ Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_t = b$ mit $I_\nu = [x_{\nu-1}, x_\nu]$, so dass Für die Treppenfunktion

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \varphi \setminus I_\nu = \sup_{x \in I_\nu} f(x) = M_\nu \qquad \varphi(b) = f(b)$$

$$\psi : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \varphi \setminus I_\nu = \inf_{x \in I_\nu} f(x) = m_\nu \qquad \psi(b) = f(b)$$

gilt: $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{dx} \leq \frac{\varepsilon}{2n}$

Sei $\mathscr{M} := \left\{ I_k \,\middle|\, U_{\frac{1}{n}}(f) \cap I_k \neq \varnothing \right\}$

$\Rightarrow M_{\frac{1}{n}}(f)$ wird von $\mathscr{M}$ überdeckt

Angenommen: $I_k \in \mathscr{M}$ enthält ein $x \in M_{\frac{1}{n}}(f)$ in seinem Inneren

$$\Rightarrow \exists K_\delta(x) \subset I_k \text{ mit } \omega_f(K_\delta(x)) \geq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow M_k - m_k = m_\delta(I_k) \geq \omega_f(K_\delta(x)) \geq \frac{1}{n}$$

Sei $\mathscr{M}^* = \left\{ I_k \,\middle|\, I_k \text{ enthält Punkt von } U_{\frac{1}{n}}(f) \text{ im Inneren} \right\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{I_k \in \mathscr{M}^*} |I_k| \leq \sum_{I_k \in \mathscr{M}^*} (M_k - m_k)|I_k|$$

$$\leq \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{dx} \leq \frac{\varepsilon}{2n}$$

Nun bestimme man zu den Teilpunkten $x_0, \ldots, x_t$ der Zerlegung abgeschlossene Intervalle $J_0, \ldots, J_t$ mit $x_k \in J_k$ und $\sum_{k=0}^{t} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow M_{\frac{1}{n}}(f) \subset \bigcup_{I_k \subset \mathscr{M}^*} I_k \cup \bigcup_{k=0}^{t} J_k \text{ mit } \sum_{I_k \in \mathscr{M}^*} |I_k| + \sum_{k=0}^{t} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Satz 8: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar und ist $f = g$ fast überall

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

Beweis: Genügt zu zeigen: Ist f integrierbar und $f = 0$ fast überall

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = 0$$

$f = f^+ - f^-$,

wobei $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$

Hatten: Mit f sind f^+ und f^- integrierbar

Also Œ $f \geq 0$

f integrierbar

$\Rightarrow \exists c > 0$, so dass $|f(x)| < c \quad \forall x$ und $M(f)$ ist Nullmenge

Sei $\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists$ Intervalle $I_\nu\ (\nu \in \mathbb{N})$, so dass

$U(f) \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu| < \frac{\varepsilon}{c}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{I_\nu} c\,\mathrm{dx} = c \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Behauptung $\square$

Definition: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f_n \to f$ fast überall auf $[a,b]$

d.h. $:\Leftrightarrow \exists$ Nullmenge $N \subset [a,b]$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\exists}{=} f(x) \qquad \forall x \in [a,b] \setminus N$$

$f_n \nearrow f$ fast überall auf $[a,b]$

$:\Leftrightarrow f_n \to f$ fast überall auf $[a,b]$ und $(f_n(x))$ ist monoton wachsend $\forall x \in [a,b]$

Analog: $f_n \searrow f$ fast überall auf $[a,b]$

$:\Leftrightarrow f_n \to f$ fast überall auf $[a,b]$ und $(f_n(x))$ ist monoton fallend $\forall x \in [a,b]$

Lemma 9: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar

$\Rightarrow \exists$ Folge von Treppenfunktionen

$\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_n \nearrow f$ fast überall auf $[a,b]$

Beweis: Sei $Z_n : a = x_{n_0} < x_{n_1} < \ldots < x_{n_{2n}} = b$ mit $x_{n_k} := a = + \frac{k(b-a)}{2^n} \quad k = 0, \ldots, 2^n$

Z_{n+1} entsteht aus Z_n durch Halbierung $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset \ldots$

Setze für jedes $n,k: J_{n_k} := \left[x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\right], \quad m_{n_k} = \inf\left\{f(x) \middle| x \in J_{n_k}\right\}$

dann ist $\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(x) = \begin{cases} m_{n_k} & \text{für } x \in J_{n_k} \\ f(b) & \text{für } x = b \end{cases}$

eine Treppenfunktion mit $\varphi \leq f$.

Offenbar ist (φ_n) monoton wachsend.

Sei $S := [a,b] \setminus \underbrace{\left(U(f) \cup \{a,b\}\right)}_{\text{Nullmenge}\left(\substack{\text{nach Lebesgnesches}\\ \text{Integrabilitätskriterium}}\right)}$

Genügt zu zeigen: $\quad \forall x \in S$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) \overset{\exists}{=} f(x)$

Sei $x_0 \in S$ als f stetig in x_0

$\Rightarrow$ zu $\varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so dass

$K_\delta(x_0) \subset (a,b)$ und $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in K_\delta(x_0)$

$\exists m,k$, so dass $x_0 \in J_{m_k} \subset K_\delta(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < \varphi_m(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in J_{m_k}$

Da $\forall n \geq m$ ist stets $\varphi_m(x_0) \leq \varphi_n(x_0) \leq f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq \varphi_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon \quad \forall n \geq m$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) \overset{\exists}{=} f(x_0)$

Satz 10: Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R} \; (n \in \mathbb{N})$ (Riemann-)integrierbar und $f_n \leq f$

Angenommen: $\quad f_n \nearrow f$ fast überall auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$