

Satz 10: Seien $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) (Riemann-)integrierbar und $f_n \leq f \quad \forall n$
 Angenommen: $f_n \nearrow f$ fast überall auf $[a, b]$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Beachte: Vorausgesetzt wird: f integrierbar

Beweis: Durch Übergang zu $(f - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass (das neue) $f = 0$ und (die neuen) $f_n \geq 0$ und f_n monoton fallend fast überall.

Zu zeigen: Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) (Riemann-)integrierbar, $f_n \geq 0 \quad \forall n$.

Angenommen: $f_n \searrow 0$ fast überall auf $[a, b]$

Zu zeigen:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0$$

Beweis: Sei $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} U(f_n) \cup \{x \in [a, b] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0\}$

Lebesgues Kriterium $\Rightarrow U(f_n) = \text{Nullmenge} \quad \forall n$

Lemma 4 $\Rightarrow N = \text{Nullmenge}$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ offene Intervalle I_1, I_2, \dots

mit $N \subset \bigcup_{v=1}^{\infty} I_v, \quad \sum_{v=1}^{\infty} |I_v| < \varepsilon$

Sei $x_0 \in [a, b] \setminus N \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0$

$\Rightarrow \exists m = m(\varepsilon, x_0)$, so dass $f_m(x_0) < \varepsilon$

Da f_m in x_0 stetig $\Rightarrow \exists$ offenes Intervall J_{x_0} mit $x_0 \in J_{x_0}$, so dass

$\forall x \in J_{x_0} \cap [a, b]$ gilt:

$$f_m(x) < \varepsilon$$

Da $f_m(x)$ monoton fallend, ist erst recht

$$1) \quad f_n(x) < \varepsilon \begin{cases} \forall x \in J_{x_0} \cap [a, b] \\ \forall n \geq m(x_0, \varepsilon) \end{cases}$$

Das System der Intervalle I_v, J_x überdeckt $[a, b]$

$\Rightarrow [a, b]$ kompakt $\Rightarrow \exists$ endlich viele Intervalle

$I_{k_1}, \dots, I_{k_r}, J_{x_1}, \dots, J_{x_s}$ die $[a, b]$ überdecken

$\exists s \geq 1$ und J_{x_r} disjunkt

Setze $J_v := I_{k_v} \cap [a, b]$

$$J'_\mu := \partial x_\mu \cap [a, b]$$

$$n_0 := \max_{\mu=1}^s m(\varepsilon, x_\mu)$$

$$1) \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon \quad \forall x \in \bigcup_{\mu=1}^s J'_\mu \quad \forall n \geq n_0$$

Trivialerweise ist $\sum_{v=1}^r |J_v| < \varepsilon$

Sei $M := \sup_{x \in [a,b]} f_1(x) \Rightarrow f_n \leq M \quad \forall n$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \leq \sum_{v=1}^r \int_{J_v} f_n(x) dx + \sum_{\mu=1}^s \int_{J'_\mu} f_n(x) dx$$

Bin ich mir nicht sicher!
Dürften keine Integrale in
den Summen stehen...
Wer's richtig weiß,
kann's mir mailen ☺

$$\leq \sum_{v=1}^n M |J_v| + \sum_{\mu=1}^s \varepsilon |J'_\mu| \leq M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot (b-a) < \varepsilon \underbrace{(M + b - a)}_{>0}$$

Da das für jedes ε gilt, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0$

Nachteil des Satzes: Man muss verlangen, dass f Riemann-integrierbar ist. Das kann nicht gefolgert werden.

Aber: Falls (f_n) wie im Satz, so kann man definieren

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \sim \text{Lebesgues Integral}$$

13 Das Lebesgues Integral

Sei I beliebiges Integral, endlich oder unendlich

Definition: φ heißt Treppenfunktion auf I

$\Leftrightarrow \exists$ ein endliches Teilintervall $[a, b] \subset I$, so dass $\varphi|_{[a, b]}$ Treppenfunktion

und $\varphi|_{I \setminus [a, b]} \equiv 0$

Sei $T(I) := \mathbb{R}$ -Vektorraum der Treppenfunktion auf I , dann gilt:

1) $\varphi, \psi \in T(I) \Rightarrow \varphi^+, \varphi^-, |\varphi|, \max(\varphi, \psi), \min(\varphi, \psi) \in T(I)$

2) $\varphi \in T(I)$, etwa $\varphi|_{I \setminus [a, b]} \equiv 0$, so definieren wir

$$\int_I \varphi(x) dx := \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{v=1}^n c_v (x_v - x_{v-1})$$

Lemma 1: Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T(I) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend und beschränkt

Sei $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, g = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ fast überall auf I

Angenommen: $f(x) \leq g(x)$ fast überall

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi_n(x) dx$$

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}$ fest

\Rightarrow Die Folge $\varphi_m - \psi_n$ ist monoton fallend, fast überall

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_m - \psi_n) \leq 0$ fast überall

$\Rightarrow (\varphi_m - \psi_n)^+$ ist monoton fallend mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_m - \psi_n)^+ = 0$ fast überall

$\exists [a, b] \subset I$, so dass $(\varphi_m - \psi_1)^+ = 0$ auf $I \setminus [a, b]$

Da $0 \leq (\varphi_m - \psi_n)^+ \leq (\varphi_m - \psi_1)^+ \Rightarrow (\varphi_m - \psi_n)^+ = 0$ auf $I \setminus [a, b]$

Lebesgues Kriterium $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\varphi_m - \psi_n)^+ dx \stackrel{\exists}{=} 0$

$$\text{Nun ist } \int_a^b \varphi_m(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \int_a^b (\varphi_m - \psi_n) dx \leq \int_a^b (\varphi_m - \psi_n)^+ dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_m(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx \leq 0$$

Da das $\forall m$ gilt, folgt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_m(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_m(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx \quad \square$$

Korollar: Sind (φ_n) und (ψ_n) 2 monoton wachsende Treppenfunktionen auf I mit

$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = g$ fast überall

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi_n(x) dx$$

Beweis: Wende Lemma 1 zweimal an. $f \leq g, g \geq f$ □

$$\text{Sei } L^+(I) := \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \left. \begin{array}{l} \exists \text{ monoton wachsende Folge } (\varphi_n), \text{ mit } \varphi_n \in T(I), \\ \text{so dass } 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) \text{ f.ü. auf } I \\ \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n(x) dx \exists \end{array} \right\}$$

Sei $L(I) := \{f = g - h \text{ f.ü.} \mid g, h \in L^+(I)\}$

Definition: $f \in L(I)$, etwa $f = g - h$ mit $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$, $h = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ f.ü., $(\varphi_n), (\psi_n)$ monoton
Wachsend

$$\int_I f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi_n(x) dx = \text{Lebesgues Integral von } f \text{ über } I$$

Lemma 2: $\int_I f(x) dx$ ist wohldefiniert

Beweis: Sei $f = g - h$ wie in Definition

Nach Korollar sind $\int_I g(x) dx$ und $\int_I h(x) dx$ unabhängig von der Wahl der Folgen (φ_n) und (ψ_n) .

Angenommen: $f = g - h = g_1 - h_1$ f.ü. mit $g, h, g_1, h_1 \in L^+(I)$

$$\Rightarrow g + h_1 = g_1 + h \text{ f.ü.}$$

$$\int_I g dx + \int_I h_1 dx := \int_I (g + h_1) dx \text{ (da Grenzwerte additiv)}$$

$$= \int_I (g_1 + h) dx = \int_I g_1 dx + \int_I h dx$$

$$\Rightarrow \int_I g dx - \int_I h dx = \int_I g_1 dx - \int_I h_1 dx \text{ (Lebesgues-integrierbar)}$$

Beispiel: Behauptung: $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ falls } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$

Ist L-integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$

Beweis: $\varphi_n \equiv 0 \quad \forall n$ (φ_n) ist Folge von Treppenfunktionen, monoton
wachsend, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ f.ü.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

Frage: Sei (φ_n) monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen
Wann konvergiert (φ_n) f.ü. gegen $f \in L^+(I)$?

Satz 3: Sei $(\varphi_n) \in T(I)$ monoton wachsend
Angenommen $\left(\int_I \varphi_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Zahlenfolge
 $\Rightarrow \exists f \in L^+(I)$ mit
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ f.ü. auf I

Beweis: Genügt zu zeigen: (φ_n) konvergiert f.ü. auf I

Denn dann: Sei $N := \left\{ x \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \text{ existiert nicht} \right\}$

Setze $f(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) & \text{für } x \in I \setminus N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}$

$\Rightarrow (\varphi_n)$ konvergiert f.ü. gegen $f \in L^+(I) \Rightarrow$ Satz

Beweis : $\exists \varphi_n \geq 0$ (sonst Übergang zu $\varphi_n - \varphi_1$)

(der Behauptung)

$\exists \varphi_n$ ist in den Unstetigkeitsstellen links- oder rechtsseitig stetig