Beweis: (Satz 3)

Genügt zu zeigen: (φ_n) konvergent f.ü.

Œ $\varphi_n \geq 0$

Œ φ_n ist Unendlichkeitsstelle links- oder rechtsseitig stetig

Sei $K > 0$, so dass $\int_I \varphi_n \,\mathrm{dx} \leq K \quad \forall n$

Für $\varepsilon > 0$ sei $M_{\varepsilon,n} := \left\{ x \in I \,\middle|\, \varphi_n(x) \geq \frac{K}{\varepsilon} \right\}$

Angenommen: $M_{\varepsilon,n} \neq \emptyset$

$\Rightarrow M_{\varepsilon,n}$ besteht aus endlich vielen disjunkten

Teilintervallen $I_1,\dots,I_m \quad m = m(n,\varepsilon)$

$$\frac{K}{\varepsilon} \sum_{\mu=1}^{n} |I_\mu| \leq \sum_{\mu=1}^{m} \int_{I_\mu} \varphi_n \,\mathrm{dx} \leq \int_I \varphi_n \,\mathrm{dx} \leq K$$

$$\Rightarrow |M_{\varepsilon,m}| := \sum_{\mu=1}^{m} |I_\mu| \leq \varepsilon$$

wegen $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ist $M_{\varepsilon,n} \subseteq M_{\varepsilon,n+1} \subseteq \dots$

$\Rightarrow M_{\varepsilon,n+1} \setminus M_{\varepsilon,n}$ ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle

$\Rightarrow M_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\varepsilon,n} =$ Vereinigung abzählbar vieler disjunkter

Intervalle $J_1, J_2, J_3, \dots$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ sind die Intervalle $J_1,\dots,J_n$ in einem festen $M_{\varepsilon,m}$ enthalten.

Da $|M_{\varepsilon,n}| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n} |J_\nu| \leq \varepsilon$

Da das $\forall n$ gilt $\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} |J_\nu| < \varepsilon$

Sei $N := \left\{ x \in I \,\middle|\, (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist divergent} \right\}$

$\Rightarrow N \subset M_\varepsilon \;\Rightarrow\;$ N wird von abzählbar vielen Intervallen der Gesamtlänge $\leq \varepsilon$ überdeckt.

Da das $\forall \varepsilon$ gilt $\Rightarrow N =$ Nullmenge

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) & \text{für } x \in I \setminus N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow (\varphi_n)$ konvergiert f.ü. gegen $f \Rightarrow f \in L^+(I)$ □

Satz 4: Sei $f \in L(I)$, $g = f$ f.ü. auf I

$\Rightarrow g \in L(I)$ und $\int_I f \,\mathrm{dx} = \int_I g \,\mathrm{dx}$

Beweis: 1. Fall: $f, g \in L^+(I),\ \varphi_n \nearrow f$ f.ü.

$$\Rightarrow \int_I f\,\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n\,\mathrm{dx} = \int_I g\,\mathrm{dx}$$

2. Fall: $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+(I)$

Da $g_2 := f_2 + (f - g)$ ist fast überall gleich f_2

$\Rightarrow g_2 \in L^+(I)$ mit $\int_I g_2\,\mathrm{dx} = \int_I f_2\,\mathrm{dx}$

$$\begin{aligned} g &= f_1 - f_2 - f + g \\ &= f_1 - (f_2 + (f - g)) \\ &= f_1 - g_2 = f_1 - f_2 \quad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow g \in L(I)$ und es ist $\int_I g\,\mathrm{dx} = \int_I f_1\,\mathrm{dx} - \int_I f_2\,\mathrm{dx} = \int_I f\,\mathrm{dx}$

Satz 5: Seien $f, g \in L(I),\ \lambda \in \mathbb{R}$

a) $f + g \in L(I)$ und $\int_I (f+g)\,\mathrm{dx} = \int_I f\,\mathrm{dx} + \int_I g\,\mathrm{dx}$

b) $\lambda f \in L(I)$ und $\int_I \lambda f\,\mathrm{dx} = \lambda \int_I f\,\mathrm{dx}$

Aber $L(I)$ ist ein $\mathbb{R}$ – VR. Wegen $T(I) \subset L(I)$ hat $L(I)$ die Dimension ∞.

Beweis: a) Sei $f = f_1 - f_2,\ g = g_1 - g_2$ mit $f_i, g_i \in L^+(I)$

$\Rightarrow f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ mit $f_1 + g_1 \in L^+(I), f_2 + g_2 \in L^+(I)$

$\Rightarrow f + g \in L(I)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_I f + g\,\mathrm{dx} &= \int_I f_1 + g_1\,\mathrm{dx} - \int_I f_2 + g_2\,\mathrm{dx} \\ &= \int_I f_1\,\mathrm{dx} + \int_I g_1\,\mathrm{dx} - \int_I f_2\,\mathrm{dx} - \int_I g_2\,\mathrm{dx} \\ &= \left(\int_I f_1\,\mathrm{dx} - \int_I f_2\,\mathrm{dx}\right) + \left(\int_I g_1\,\mathrm{dx} - \int_I g_2\,\mathrm{dx}\right) \\ &= \int_I f\,\mathrm{dx} + \int_I g\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

Satz 6: Sei $f, g \in L(I)$

a) $f \geq g$ f.ü. $\Rightarrow \int_I f\,\mathrm{dx} \geq \int_I g\,\mathrm{dx}$

b) $f \geq 0$ f.ü. $\Rightarrow \int_I f\,\mathrm{dx} \geq 0$

Beweis: a) trivial
b) Spezialfall von a)

Satz 7: Sei $f \in L(I)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists g, h \in L^+(I)$, so dass $f = g - h,\ h \geq 0$ und $\int_I h \, dx < \varepsilon$

Beweis: Sei $f = g_1 - h_1$ und $g_1, h_1 \in L^+(I)$ irgendwie

Sei $\psi_n \in T(I)$ monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} \int_I \psi_n \, dx = \int_I h_1 \, dx$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \int_I h_1 \, dx - \int_I \psi_N \, dx < \varepsilon$

$\Rightarrow$ für $h_2 := h_1 - \psi_N$ gilt:

$h_2 \in L^+(I),\ h_2 \geq 0$ f.ü. mit $\int_a^b h_2 \, dx < \varepsilon$

für $g_2 := g_1 - \psi_N$ gilt:

$g_2 \in L^+(I)$ und $f = g_1 - h_1 = (g_1 + \psi_N) - (h_1 - \psi_N) = g_2 - h_2$

Sei $h := h_2^+,\ g := g_2 + (h - h_2)$

$\Rightarrow h \geq 0$

h und h_2 unterscheiden sich nur um eine Nullmenge

$\Rightarrow g$ und g_2 unterscheiden sich nur um eine Nullmenge

$\Rightarrow g, h \in L^+(I)$ und $\int_I h \, dx = \int_I h_2 \, dx < \varepsilon$

$g - h = g_2 - h_2 = f$

Treppenfunktion $\to L^+ -$Funktion $\to$ Integral $\to$ Differential von L^+

$\to L \to$ Integral $\to$ monoton wachsende Folge von $L-$Funktionen $\to \ldots$

Satz 8: Sei $f_n \in L^+(I)$ monoton $\nearrow$ Folge mit beschränkter Integralfolge $\left(\int_I f_n \, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \exists f \in L^+(I)$ mit

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ f.ü.

b) $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x) = \int_I f \, dx$

Beweis: Sei $\int_I f_n \, dx \leq M \quad \forall n$

Sei $(\varphi_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton $\nearrow$ Folge aus $T(I)$ mit $\lim_{k\to\infty} \int_I \varphi_{n+k} \, dx = \int_I f_n \, dx$

Sei $p_n := \max_{j,k=1}^{n} (\varphi_{j,k}) \in T(I)$

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton $\nearrow$ Folge von Treppenfunktionen

Fast überall ist $\varphi_{j,k} \leq \varphi_j \leq f_n \quad \forall j \leq n$

$\Rightarrow \varphi_n \leq f_n$ ☆

$\Rightarrow \int_I \varphi_n \,\mathrm{dx} \le \int_I f_n \,\mathrm{dx} \le M \quad \forall n$

Satz 3 $\Rightarrow \exists f \in L^+(I)$ mit $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ f.ü.

Aus Definition $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n \,\mathrm{dx} = \int_I f \,\mathrm{dx}$

Für $j \ge n$ ist $\varphi_{j_n} \le \varphi_n$

Lässt man $n \to \infty$ gehen, so folgt: $f_j \le f$ f.ü.
d.h. $f_j \le f \quad \forall x \in I \setminus N_j$ mit $N_j =$ Nullmenge

Sei $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ Nullmenge

$\Rightarrow f_j \le f \quad \forall j \in I \setminus N$

$\Rightarrow f_j \le f$ f.ü. ☆ $\Rightarrow \varphi_n \le f_n \le f \quad \forall n \in \mathbb{N}$ f.ü. ☆☆

$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ f.ü.

☆ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f$ f.ü.

zu b)

☆☆ $\Rightarrow \int_I \varphi_n \,\mathrm{dx} \le \int_I f_n \,\mathrm{dx} \le \int_I f \,\mathrm{dx}$

Da $\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n \,\mathrm{dx} = \int_I f \,\mathrm{dx} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \,\mathrm{dx} = \int_I f \,\mathrm{dx}$

Konvergenzsatz von Levi
Sei (f_n) monoton steigende Folge von Funktionen

$f_n \in L(I)$ und beschränkter Integralfolge $\left(\int_I f_n \,\mathrm{dx} \right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \exists f \in L(I)$ mit 1) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ f.ü.

2) $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \,\mathrm{dx} = \int_I f \,\mathrm{dx}$