Beweis: (Konvergenzsatz)

Œ (f_n) monoton $\nearrow$ (sonst $-f_n$)

Œ $f_n > 0 \quad \forall n$ (sonst $f_n - f_1$)

Setze $f_0 = 0$

$$(f_n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1}) \text{ konvergent, wobei alle } (f_n - f_{n-1}) \geq 0$$

Satz 7 $\Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}\ \exists\ g_n,\ h_n \in L^+(I)$

$$\text{mit } f_n - f_{n-1} = g_n - h_n \text{ mit } h \geq 0 \text{ und } \int_I h_n \,\mathrm{dx} \leq \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow g_n = f_n - f_{n-1} + h \geq 0$

Setze $s_n := g_1 + \ldots + g_n,\ t_n := h_1 + \ldots + h_n$

$\Rightarrow$ Die Folgen (s_n), (t_n) sind monoton $\nearrow$, $s_n, t_n \in L^+(I)$

$$s_n - t_n = (g_1 - h_1) + \ldots + (g_n - h_n) =$$
$$= f_1 - \underbrace{f_0}_{=0} + f_2 - f_1 + \ldots + f_n - f_{n-1} = f_n \ ☆$$

Die Zahlenfolge $\left(\int_I t_n \,\mathrm{dx} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

$\Rightarrow$ Die Folge $\left(\int_I s_n \,\mathrm{dx} \right) = \int_I f_n \,\mathrm{dx} + \int_I t_n \,\mathrm{dx}$ ist beschränkt

Satz 8 $\Rightarrow \exists s, t \in L^+(I)$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ f.ü. und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I s_n \,\mathrm{dx} = \int_I s \,\mathrm{dx}$

$\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = t(x)$ f.ü. und $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \,\mathrm{dx} = \int_I t \,\mathrm{dx}$

☆ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim s_n(x) - \lim t_n(x) = s(x) - t(x)$ f.ü.

$$\lim \int_I f_n \,\mathrm{dx} = \lim \int_I s_n \,\mathrm{dx} - \lim \int_I t_n \,\mathrm{dx} = \int_I s_n \,\mathrm{dx} - \int_I t_n \,\mathrm{dx} = \int_I f \,\mathrm{dx} \text{ mit } f := s - t$$

Korollar 1: Sei $f_k \in L(I)\ \ \forall k \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_I |f_k| \,\mathrm{dx}$ beschränkt

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergent f.ü. gegen ein $f \in L(I)$

und $\int_I \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) \,\mathrm{dx} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_I f_k(x) \,\mathrm{dx}$

Beweis: Setze $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^+$ und $t_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^-$

(s_n) und (t_n) sind monoton wachsende Folgen aus $L(I)$

mit $\left(\int_I s_n \,\mathrm{dx} \right)$ und $\left(\int_I t_n \,\mathrm{dx} \right)$ beschränkte Zahlenfolgen

(denn $\int_I f_k^+ \,\mathrm{dx} \leq \int_I |f_k| \,\mathrm{dx}$ und $\int_I f_k^- \,\mathrm{dx} \leq \int_I |f_k \,\mathrm{dx}|$, also beschränkt (Vgl. Vor.)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \int_I s_n \,\mathrm{dx} \le \sum_{k=1}^{n} \int_I |f_k| \,\mathrm{dx} \\ \int_I t_n \,\mathrm{dx} \le \sum_{k=1}^{n} \int_I |f_k| \,\mathrm{dx} \end{array}\right\}\text{beschränkte Zahlenfolgen)}$$

Konvergenzsatz von Levi $\Rightarrow \exists\, s,t \in L(I)$ mit $\lim s_n = s$ f.ü., $\lim t_n = t$ f.ü.

$$\text{und} \lim_{n\to\infty} \int_I s_n \,\mathrm{dx} = \int_I s \,\mathrm{dx} \text{ und} \lim_{n\to\infty} \int_I t_n \,\mathrm{dx} = \int_I t \,\mathrm{dx}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(f_k^+ - f_k^-\right) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} t_n = s - t =: f$$

Korollar 2: Für $f \in L(I)$ sind äquivalent:

1) $f = 0$ f.ü.
2) $\int_I |f| \,\mathrm{dx} = 0$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) $f = 0$ f.ü. $\Rightarrow |f| = 0$ f.ü.

$$\Rightarrow \int_I |f| \,\mathrm{dx} = \int_I 0 \,\mathrm{dx} = 0$$

2) $\Rightarrow$ 1) $\int_I |f| \,\mathrm{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_I |f| \,\mathrm{dx} = 0$

Korollar 1 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f$ konvergent f.ü.

Das ist aber nur möglich, wenn $f = 0$ f.ü. ist.

Konvergenzsatz von Lebesgnes

Sei $f_n \in L(I) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Angenommen: 1) $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{\exists}{=} f$ f.ü.

2) $|f_n| \le g \in L(I)$

$\Rightarrow f \in L(I)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \,\mathrm{dx} = \int_I \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{=f} \,\mathrm{dx}$$

Beweis: Sei $N := \left\{ x \in I \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ne f(x) \right\}$ Nullmenge

Setze für $x \in I \setminus N$: $g_n(x) := \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \ldots\}$ monoton $\nearrow$

$h_n(x) := \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \ldots\}$ monoton $\searrow$

Für $x \in \mathbb{N}$ setze: $g_n(x) = h_n(x) = 0$

Aus ANA I $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\inf f_{n(x)} = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ f.ü.

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ f.ü.}$$

Setze $u_{n,k} := \min\left\{f_n,\dots,f_{n+k}\right\} \in L(I)$

Es gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n,k} \overset{\exists}{=} g_n(x)$ f.ü.

$\left(u_{n,k}\right) = \text{monoton} \searrow$

Wegen $-g \le f_n \le g \quad \forall n \;\Rightarrow -g \le u_{n,k} \le g \quad \forall n,k$

$$\Rightarrow -\int_I g\,\mathrm{dx} \le \int_I u_{n,k}\,\mathrm{dx} \le \int_I g\,\mathrm{dx}$$

Satz von Levi $\Rightarrow g_n \in L(I)$

Analog sieht man: $h_n \in L(I)$

Wegen $\underbrace{\int_I g_1\,\mathrm{dx}}_{c_1} \le \int_I g_n\,\mathrm{dx} \le \int_I h_n\,\mathrm{dx} \le \underbrace{\int_I h_1\,\mathrm{dx}}_{c_2}$

Satz von Levi $\Rightarrow f \in L(I)$

und $\lim \int_I g_n\,\mathrm{dx} = \int_I f\,\mathrm{dx},\ \lim \int_I h_n\,\mathrm{dx} = \int_I f\,\mathrm{dx}$

wegen $\underbrace{\int_I g_n\,\mathrm{dx}}_{\int f\,\mathrm{dx}} \le \int_I f_n\,\mathrm{dx} \le \underbrace{\int_I h_n\,\mathrm{dx}}_{\int f\,\mathrm{dx}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_I f_n\,\mathrm{dx} = \int_I f\,\mathrm{dx} = \int_I \lim f_n\,\mathrm{dx}$$

§ 14 Messbare Funktionen

$f \in L(I) \iff f = f_1 - f_2$ mit $\exists$ monoton $\nearrow$ Folge $\varphi_n, \psi_n \in T(I)$ mit

1) $\lim \varphi_n = f_1$ f.ü.

   $\lim \psi_n = f_2$ f.ü.

2) $\lim \int_I \varphi_n\,\mathrm{dx} = \int_I f_1\,\mathrm{dx}$

   $\lim \int_I \psi_n\,\mathrm{dx} = \int_I f_2\,\mathrm{dx}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\varphi_n - \psi_n\right) = f$ f.ü.

Also: $f \in L(I) \Rightarrow \exists$ Folge $\left(g_n\right) \in T(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$ f.ü.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen <u>nicht</u>.

Definition: $f: I \to \mathbb{R}$ **messbar** $:\iff \exists$ Folge $\varphi_n \in T(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ fast überall

Sei $M(I) := \left\{\text{messbare Funktion auf } I\right\}$

Satz 1: $L(I) \subset M(I)$

Satz 2: Sei $f \in M(I)$ mit $|f| \leq g \in L(I)$

$\Rightarrow f \in L(I)$

Zeige etwas allgemeiner:

Satz 3: Seien $f_n \in L(I) \quad \forall n$

Angenommen: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ f.ü.

2) $|f| \leq g$ f.ü. mit $g \in L(I)$

$\Rightarrow f \in L(I)$

Beweis: Sei $g_n : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & \mathrm{f}_n(x) > g(x) \\ f_n(x) \quad \text{falls} & -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \\ -g(x) & f_n(x) \leq -g(x) \end{cases}$$

Also: $g_n = \max(-g, \min(f_n, g)) \in L(I)$

Offenbar ist $|g_n| \leq g \quad \forall n$

und $\lim g_n = \max(-g, \min(f_n, g)) = f$ f.ü.

Konvergenzsatz von Lebesgnes $\Rightarrow f \in L(I)$

Satz 4: Seien $f, g \in M(I)$

$\Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \max(f,g),\ \min(f,g),\ f^+,\ f^-,\ |f| \in M(I)$

Beweis: $f \in M(I)$: $\quad \exists \varphi_n \in T(I)$: $\quad \lim \varphi_n = f$ f.ü.

$g \in M(I)$: $\quad \exists \psi_n \in T(I)$: $\quad \lim \psi_n = g$ f.ü.

$\Rightarrow \varphi_n + \psi_n,\ \varphi_n \cdot \psi_n \in T(I)$

mit $\lim(\varphi_n + \psi_n) \overset{\exists}{=} f + g$ f.ü.

$\lim(\varphi_n \cdot \psi_n) \overset{\exists}{=} f \cdot g$ f.ü.

Satz 5: Sei $f \in M(I)$ mit $f \neq 0$ f.ü.

Setze $g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} & \text{falls} \quad f_n(x) \neq 0 \\ \text{irgendwie} & \phantom{\text{falls}} \quad f_n(x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow g \in M(I)$

Beweis: Sei $\varphi_n \in T(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ f.ü.

Setze $\psi_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_n(x)} & \text{falls } \varphi_n(x) \neq 0 \\ 0 & \varphi_n(x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (\psi_n)$ Folge von Elementen aus $T(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = g$ f.ü. $\square$