$M(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists \text{ Folge } \varphi_n \in T(J) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \varphi_n = f \text{ f.ü.} \right\}$

Satz 6: Seien $f_n \in M(I)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ f.ü.

$\Rightarrow f \in M(I)$

Beweis: Sei $g \in L(I)$ mit $g(x) > 0 \;\; \forall x \in I$ (gibt's immer, $I = \mathbb{R} : f = e^{-x^2} : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \overset{\exists}{=} \sqrt{\pi}$)

Sei $h_n := \frac{g \cdot f_n}{g + |f_n|}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{g \cdot f_n}{g + |f_n|} = \frac{g \cdot f}{g + |f|} =: h$

Satz 4 $\Rightarrow h_n \in M(I)$

$\forall x \in I$ mit $f_n(x) \neq 0$ ist $|h_n(x)| = \frac{g(x) \cdot |f_n(x)|}{g(x) + |f_n(x)|} < \frac{g(x) \cdot |f_n(x)|}{|f_n(x)|} = g(x)$

$\forall x \in I$ mit $f_n(x) = 0 : \quad h_n(x) = 0 < g(x)$

$\Rightarrow |h_n| < g$ auf J

Satz 2 $\Rightarrow h_n \in L(I) \;\; \forall n$

Wie für h_n zeigt man, dass $|h| < g \quad$ (n weglassen)

Lebesgnes'scher Konvergenzsatz $\Rightarrow h \in L(I)$

h hat dasselbe Vorzeichen wie $f \Rightarrow h \cdot |f| = |h| \cdot f$

$\Rightarrow g \cdot f = g \cdot h + |f| \cdot h = g \cdot h + f \cdot |h|$

$\Rightarrow f \underbrace{\left(g - |h|\right)}_{>0} = gh \;\Rightarrow\; f = \frac{gh}{g + |h|} \in M(I)$ □

Satz 7: $f \in M(I),\; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow g \circ f \in M(I)$

Beweis: Sei $\varphi_n \in T(I)$ mit $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ f.ü.

$\Rightarrow g \circ \varphi_n \in T(I)$ und $\lim_{n\to\infty} g \circ \varphi_n(x) \underset{g\text{ stetig}}{=} g \circ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)) g \circ f(x)$ f.ü. □

Sei $p \in \mathbb{R},\; p \geq 1$

$L^p(I) := \left\{ f \in M(I) \,\middle|\, |f|^p \in L(I) \right\}$ (wichtigster Fall: $p = 2$: quadrat-integrierbare Funktion)

$L^1(I) = \left\{ f \in M(I) \,\middle|\, |f| \in L(I) \right\}$

Satz 2 besagt: $f \in M(I)$ mit $|f| \leq g \in L(I) \;\Rightarrow\; f \in L(I)$

insbesondere $f \in M(I) \quad |f| \leq |f| \in L(I) \;\Rightarrow\; f \in L(I)$

$\Rightarrow L^1(I) = L(I)$

Satz 8: $L^p(I)$ ist ein $\mathbb{R}$ – Vektorraum

Beweis: Seien $f, g \in L^p(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

z.z.: i) $\alpha f \in L^p(I)$

ii) $f + g \in L^p(I)$

zu i) ist klar, denn $\int_I |\alpha f|^p \,\mathrm{dx} = |\alpha|^p \int_I |f|^p \,\mathrm{dx}$

zu ii) Satz 4 $\Rightarrow f + g \in M(I)$ und $|f + g| \in M(I)$

Satz 7 $\Rightarrow |f + g|^p \in M(I)$

wegen $|f + g| \le |f| + |g| \le 2\max(|f|, |g|)$

$\Rightarrow |f + g|^p \le \underbrace{2^p \max\left(|f|^p, |g|^p\right)}_{\in L(I)}$

Satz 2 $\Rightarrow |f + g|^p \in L(I)$

d.h. $f + g \in L^p(I)$

In Analysis I hatten wir die p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

$$x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

und hatten die Hölder-Ungleichung:

$$\sum_{\nu=1}^n |x_\nu y_\nu| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

für $p, q \ge 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

und daraus die Minkowski-Ungleichung gefolgert:

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

Ziel: Führe auf $L^p(I)$ eine Norm ein, so dass $L^p(I)$ zu einem XXXRaum wird.

Dazu: Höldersche Ungleichung: Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(I)$, $g \in L^p(I)$ gilt:

$$f \cdot g \in L^1(I) \text{ und } \left|\int_I f \cdot g \,\mathrm{dx}\right| \le \int_I |f \cdot g| \,\mathrm{dx} \le \left|\int_I |f|^p \,\mathrm{dx}\right|^{1/p} \cdot \left|\int_I |g|^q \,\mathrm{dx}\right|^{1/q}$$

Beweis: (genau wie für $\mathbb{R}^n$)

Nach Satz 2 genügt es, die 2. Ungleichung zu beweisen

Œ $A := \int_I |f|^p \,\mathrm{dx} > 0$ und $B := \int_I |g|^q \,\mathrm{dx} > 0$

($A = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü. Kor2 zu Satz von Levi $\Rightarrow |f \cdot g| = 0$ f.ü. $\Rightarrow \int_I |f \cdot g| \,\mathrm{dx} = 0$ f.ü.)

Analysis I §3 Lemma 9:

$$p,q>1 \text{ mit } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \ x,y\in\mathbb{R}_+$$
$$\Rightarrow x^{1/p}y^{1/q}\le\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$$

Wende Lemma an auf $x=\frac{|f|^p}{A},\ \ y=\frac{|g|^q}{B}$

$$\left(\frac{|f|^p}{A}\right)^{1/p}\cdot\left(\frac{|g|^q}{B}\right)^{1/q}\le\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{A}+\frac{1}{q}\frac{|g|^q}{B}$$

$$\Rightarrow |f\cdot g|=\left(|f|^p\right)^{1/p}\cdot\left(|g|^q\right)^{1/q}\le\frac{1}{p}A^{1/p}\cdot B^{1/q}\frac{|f|^p}{A}+\frac{1}{q}A^{1/p}\cdot B^{1/q}\frac{|g|^q}{B}$$

Satz 2 $\Rightarrow f\cdot g\in L^1(I)$

$$\int_I|fg|\,\mathrm{dx}\le\frac{1}{p}\frac{A^{1/p}\cdot B^{1/q}}{\cancel{A}}\underbrace{\int_I|f|^p\,\mathrm{dx}}_{\cancel{A}}+\frac{1}{q}\frac{A^{1/p}\cdot B^{1/q}}{\cancel{B}}\underbrace{\int_I|g|^q\,\mathrm{dx}}_{\cancel{B}}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}_{=1}A^{1/p}\cdot B^{1/q}=\left(\int_I|f|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}\cdot\left(\int_I|g|^q\,\mathrm{dx}\right)^{1/q}\qquad\square$$

Wie in Analysis I erhält man aus der Hölder-Ungleichung die Minkowskische Ungleichung:

$$\forall f,g\in L^p(I) \text{ ist } \left(\int_I|f+g|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}\le\left(\int_I|f|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}+\left(\int_I|g|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}$$

Definition: $\forall f\in L^p(I)$ sei $\|f\|_p:=\left(\int_I|f|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}$

Korollar: $\|\cdot\|_p$ ist Norm auf dem Vektorraum $L^p(I)$

Beweis: z.z.:
i) $\|f\|_p\ge0\ \ \forall f$ und $\|f\|_p=0\ \Leftrightarrow\ f=0$ f.ü.
ii) $\|\lambda f\|_p=|\lambda|\cdot\|f\|_p$
iii) $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$

zu i) Ist Korollar 2 aus Satz von Levi

zu ii) $\|\lambda f\|_p=\left(\int_I|\lambda f|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}=|\lambda|\left(\int_I|f|^p\,\mathrm{dx}\right)^{1/p}=|\lambda|\cdot\|f\|_p$

zu iii) Minkowski-Ungleichung

Bemerkung: Streng genommen ist $\|\cdot\|_p$ keine Norm auf $L^p(I)$, sondern ist Norm auf dem Quartärtem–VR: $L^p(I)/\sim$ wobei $f\sim g\ \Leftrightarrow\ f=g$ f.ü.

Satz 9: $L^p(I)$ ist ein Barrachraum???

Definition: Ein normierter Vektorraum heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge aus $\mathbb{V}$ konvergent gegen ein Element aus $\mathbb{V}$ ist.

(f_n) heißt **konvergent** (im Sinne der Norm) gegen f

Cauchy-Folge: $f_n - f$

Ein **XXX** ist ein vollständig normierter Vektorraum.

Beispiel: $\dim \mathbb{V} < \infty$, $\|\cdot\|$ irgendeine Norm

$\Rightarrow (\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ ist ein XXX