<u>$\varepsilon-\delta-$Kriterium der Stetigkeit</u>

Sei $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ Abbildung metrischer Räume. Äquivalent sind für $x_0\in\mathbb{X}$:

(i) f ist stetig in x_0

(ii) $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0$, so dass gilt:
$d\left(f(x),f(x_0)\right)<\varepsilon\qquad\forall x\in\mathbb{X}$ mit $d(x,x_0)<\delta$

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii) Angenommen f stetig in x_0, d.h. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\overset{\exists}{=}f(x_0)$

Angenommen (ii) gilt nicht, d.h.:
$\exists\varepsilon>0$, so dass $\forall\delta>0\quad\exists x\in\mathbb{X}$, so dass
$d(x,x_0)<\delta$, aber $d\left(f(x),f(x_0)\right)\geq\varepsilon$

Insbesondere: Zu $\delta=\frac{1}{n}\quad\exists x_n$ mit $d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$,
aber $d\left(f(x_n),f(x_0)\right)\geq\varepsilon\quad\otimes$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

(i) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)\quad$ ↯ zu $\otimes$

(ii)$\Rightarrow$(i) Angenommen (ii) gilt:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{X}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

z.Z. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0$, so dass $d(x_n,x_0)<\delta$

(ii) $\Rightarrow d\left(f(x_n),f(x_0)\right)<\varepsilon$

$\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}$ mit $d(x_n,x_0)<\delta\qquad\forall n\geq N$

$\Rightarrow d\left(f(x_n),f(x_0)\right)<\varepsilon\qquad\forall n\geq N$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

Beispiel: $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R},\quad x_0\in\mathbb{X}$ definiert durch $f(x)=d(x,x_0)$ ist stetig auf $\mathbb{X}$

Beweis: Sei $y\in\mathbb{X}$ und $\varepsilon>0$. Wähle $\delta=\varepsilon$

Sei $d(x,y)<\delta=\varepsilon$

z.Z. $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$

Aber: $\left|f(x)-f(y)\right|=\left|d(x,x_0)-d(y,x_0)\right|\leq d(x,y)$

$\left(\text{weil: } d(x,x_0)\leq d(x,y)+d(y,x_0)\right)$

Seien $f_n:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}\quad(n\in\mathbb{N})$ und $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ Abbildungen metrischer Räume.

Definition: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f

$:\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}$, so dass $d\left(f_n(x)-f(x)\right)<\varepsilon\qquad\forall n\geq N\ \forall x\in\mathbb{X}$

Satz 11: Angenommen: (1) $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$
(2) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f
$\Rightarrow f$ ist stetig

Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{X}$
z.Z. f stetig in x_0
Sei $\varepsilon > 0$, da (f_n) gleichmäßig konvergiert $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in \mathbb{X}, \quad n \geq N$$

da f_N stetig in x_0 ist $\exists \delta > 0$, so dass

$$d\left(f_N(x), f_N(x_0)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in \mathbb{X} \text{ mit } d(x, x_0) < \delta$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{X}$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(x_0)\right) &\overset{\triangle-Ungl}{\leq} d\left(f(x), f_N(x)\right) + d\left(f_N(x), f_N(x_0)\right) + d\left(f_N(x_0), f(x_0)\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Satz 12: Sei $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ Abbildung metrischer Räume.
Für $x_0 \in \mathbb{X}$ sind äquivalent:
(i) f stetig in x_0
(ii) Zu jeder Umgebung $\mathbb{V}$ von $f(x_0)$ existiert eine Umgebung $\mathbb{U}$ von x_0, so dass $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{V}$

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii) Sei f stetig in x_0 und $\mathbb{V}$ Umgebung von $f(x_0)$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, so dass $B\left(f(x_0), \varepsilon\right) \subset \mathbb{V}$
Nach $\varepsilon - \delta -$Kriterium $\exists \delta > 0$, so dass

$$d\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon \qquad \forall x \in \mathbb{X} \text{ mit } d(x, x_0) < \delta$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$f(x) \in B\left(f(x_0), \varepsilon\right) \qquad\qquad x \in B(x_0, \delta)$$

$\Leftrightarrow f\left(B(x_0, \delta)\right) \subseteq B\left(f(x_0), \varepsilon\right)$
Also: Für $\mathbb{U} = B(x_0, \delta)$ gilt $f(\mathbb{U}) \subset B\left(f(x_0), \varepsilon\right) \subset \mathbb{V}$

(ii)$\Rightarrow$(i) ist auch das $\varepsilon - \delta -$Kriterium

Satz 13: Äquivalent sind für $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$
(i) f ist stetig
(ii) Das Urbild $f^{-1}(\mathbb{V})$ jeder offenen Menge $\mathbb{V}$ in $\mathbb{Y}$ ist offen in $\mathbb{X}$

(Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ topologischer Räume heißt stetig, wenn (ii) gilt.)

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii) Sei $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ stetig und $\mathbb{V}\subset\mathbb{Y}$ offen.

z.Z.: $f^{-1}(\mathbb{V})$ offen

Sei $x_0\in f^{-1}(\mathbb{V})$ beliebig: z.Z. $f^{-1}(\mathbb{V})$ ist Umgebung von x_0

Da $\mathbb{V}$ Umgebung von $f(x_0)$, gibt es nach Satz 12 (ii) eine Umgebung

$\mathbb{U}$ von x_0 mit $f(\mathbb{U})\subset\mathbb{V}$

$\Rightarrow \mathbb{U}\subset f^{-1}(\mathbb{V}) \Rightarrow f^{-1}(\mathbb{V})$ Umgebung von x_0

$\Rightarrow f^{-1}(\mathbb{V})$ offen

(ii)$\Rightarrow$(i) Angenommen: Ist $\mathbb{V}\subset\mathbb{Y}$ offen, so ist auch $f^{-1}(\mathbb{V})\subset\mathbb{X}$ offen

Sei $x_0\in\mathbb{X}$ beliebig: z.Z. f stetig in x_0

Ist $\mathbb{V}$ Umgebung von $f(x_0)\Rightarrow\exists$ offene Menge $\mathbb{V}_1$

mit $f(x_0)\subset\mathbb{V}_1\subset\mathbb{V}$

(ii)$\Rightarrow \mathbb{U}=f^{-1}(\mathbb{V}_1)$ offen

Da $x_0\in\mathbb{U}\Rightarrow\mathbb{U}$ Umgebung von x_0 mit $f(\mathbb{U})\subset\mathbb{V}$

Satz 12$\Rightarrow f$ stetig in x_0

Korollar: Äquivalent sind
(i) $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ stetig
(ii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge von $\mathbb{Y}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{X}$.

Beispiel: Sei $\mathbb{X}$ metrischer Raum, $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ stetig und $c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{U}:=\{x\in\mathbb{X}\,|\,f(x)<c\}$ offen

$A:=\{x\in\mathbb{X}\,|\,f(x)=c\}$ abgeschlossen

Beweis: $\mathbb{U}=f^{-1}((-\infty,c))$ und $(-\infty,c)$ offen in $\mathbb{R}$

$A=f^{-1}(c)$ und $c\in\mathbb{R}$ abgeschlossen

Definition: Sei $\mathbb{X}$ metrischer Raum, $A\subset\mathbb{X}$
Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie $(\mathbb{U}_i)_{i\in\mathbb{I}}$ von offenen Teilmengen $\mathbb{U}_i$ von $\mathbb{X}$ mit $A\subset\bigcup_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{U}_i$

Definition: A heißt **kompakt in** $\mathbb{X}$:$\Leftrightarrow$ zu jeder offenen Überdeckung $(\mathbb{U}_i)_{i\in\mathbb{I}}$ von A gibt es endlich viele $i_1,\dots,i_k\in\mathbb{I}$, so dass

$A\subset\mathbb{U}_{i_1}\cup\dots\cup\mathbb{U}_{i_k}$

Man sagt: Jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckungen
(Heine-Borel-Eigenschaft)

Satz 14: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Punktfolge im metrischen Raum $\mathbb{X}$ und $\overset{\exists}{\lim_{n\to\infty} x_n = x_0}$

$\Rightarrow$ Die Menge $A = \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ ist kompakt.

Beweis: Sei $(\mathbb{U}_i)_{i\in\mathbb{I}}$ offene Überdeckung von A

Da $x_0 \in A \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{I}$ mit $x_0 \in \mathbb{U}_{i_0}$

Da $\mathbb{U}_{i_0}$ offen und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$\exists N\in\mathbb{N}$, so dass $x_n \in \mathbb{U}_{i_0} \quad \forall n \geq N$

Außerdem liegt jedes $x_k \in \mathbb{U}_{i_k}$ für ein $i_k \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow A \subset \mathbb{U}_{i_1} \cup \mathbb{U}_{i_2} \cup \ldots \cup \mathbb{U}_{i_{N-1}} \cup \mathbb{U}_{i_0}$

<u>Bemerkung</u>: $A' = A \setminus \{x_0\}$ ist nicht notwendig kompakt

Beispiel: $A' = \left\{\frac{1}{n} \middle| n\in\mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{U}_1 = \left(\frac{1}{2}, 2\right), \mathbb{U}_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \qquad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow (\mathbb{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ offene Überdeckung von A'

Jedes $\mathbb{U}_i$ enthält genau einen Punkt von A'

$\Rightarrow \nexists$ endliche Teilüberdeckungen, d.h. A' <u>nicht</u> kompakt

Satz 15: Seien $a_\nu \leq b_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 1,\ldots,n$

$\Rightarrow$ Der abgeschlossene Quader $Q := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu\}$ ist

Beweis: Sei $(\mathbb{U}_i)_{i\in\mathbb{I}}$ eine offene Überdeckung von Q

Annahme: Q lässt sich nicht durch endlich viele $\mathbb{U}_i$ überdecken

Wir konstruieren mit Induktion Folge abgeschlossener Teilquader

$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2, \ldots$ für die gilt:

(i) Q_m kann nicht durch endlich viele $\mathbb{U}_{i_k}$ überdeckt werden

(ii) $\operatorname{diam}(Q_m) = \frac{1}{2^m}\operatorname{diam}(Q)$

Sei $m \geq 0$ und Q_m bereits konstruiert

Sei etwa: $Q_m = \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \times \ldots \times \mathbb{I}_n$

wobei $\mathbb{I}_\nu$ abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.

Zerlege $\mathbb{I}_\nu$ in 2 abgeschlossene Intervalle der halben Länge

Setze für $s_\nu = 1,2$

$Q_m^{(s_1,\ldots,s_n)} := \mathbb{I}_1^{(s_1)} \times \ldots \times \mathbb{I}_n^{(s_n)}$

Wir erhalten 2^n abgeschlossene Quader mit

$$\bigcup_{s_1,\ldots,s_n=1}^{2} Q_m^{(s_1,\ldots,s_n)} = Q_m$$

Da Q_m nicht von endlichen $\otimes$ vielen $\mathbb{U}_{i_k}$ überdeckt werden kann, $\exists Q_m^{(s_1,\ldots,s_n)}$, das nicht von endlich vielen $\mathbb{U}_{i_k}$ überdeckt werden kann.

Setze $Q_{m+1} = Q_m^{(s_1,\ldots,s_n)}$

Schachtelungsprinzip $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{X}$ mit $x_0 \in Q_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Da $\left(\mathbb{U}_i\right)_{i\in\mathbb{I}}$ Überdeckung von $Q \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{I}$ mit $x_0 \in \mathbb{U}_{i_0}$

Da $\mathbb{U}_{i_0}$ offen $\exists \varepsilon > 0$, so dass $B\left(x_0, \varepsilon\right) \subset \mathbb{U}_{i_0}$

Sei m so groß, dass $\operatorname{diam}\left(Q_m\right) < \varepsilon$

Da $x_0 \in Q_m \quad \Rightarrow Q_m \subset B\left(x_0, \varepsilon\right) \subset \mathbb{U}_{i_o}$ $\otimes$ ⚡