

**Satz 16:** Jede kompakte Menge  $A$  eines metrischen Raumes  $\mathbb{X}$  ist beschränkt und abgeschlossen.

**Beweis:** I. Behauptung:  $A$  beschränkt

Beweis: Sei  $x_0 \in \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, n)$

$\Rightarrow$  Also  $\mathbb{X}$  offene Überdeckung von  $A$

Definition  $\Rightarrow \exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , so dass  $A \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_0, n_i)$

Sei  $N := \max(n_1, \dots, n_k)$

$\Rightarrow A \subset B(x_0, N)$ , d.h.  $A$  beschränkt

II. Behauptung:  $A$  abgeschlossen

Beweis: z.Z.:  $\mathbb{X} \setminus A$  offen.

Sei  $x \in \mathbb{X} \setminus A$  beliebig

Für  $n \geq 1$  sei  $U_n := \left\{ y \in \mathbb{X} \mid d(y, x) > \frac{1}{n} \right\}$

$U_n$  offen und es gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{X} \setminus \{x\} \supset A$$

Def:  $\Rightarrow \exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , so dass  $A \subset \bigcup_{j=1}^k U_{n_j}$

Für  $N := \max(n_1, \dots, n_k)$  gilt:

$$A \subset U_N$$

$$\Rightarrow B(x, N) \subset \mathbb{X} \setminus U_N \subseteq \mathbb{X} \setminus A$$

$\parallel$   
offen in  $\mathbb{X} \setminus A \Rightarrow \mathbb{X} \setminus A$  offen.

**Satz 17:**  $\mathbb{X}$  = metrischer Raum,  $K \subset \mathbb{X}$  kompakt  
 $A \subset K$  abgeschlossen  $\Rightarrow A$  kompakt

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in \mathbb{I}}$  offene Überdeckung von  $A$

z.Z.  $\exists$  endliche Teilüberdeckung

$\mathbb{X} \setminus A$  offen und es gilt:

$$(\mathbb{X} \setminus A) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i = \mathbb{X} \supset K$$

Da  $K$  kompakt,  $\exists$  endlich viele  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{I}$ , so dass

$$K \subset (\mathbb{X} \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \quad \square$$

**Satz von Heine-Borel:** Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

- (i)  $A$  kompakt
- (ii)  $A$  abgeschlossen und beschränkt

**Beweis:** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Das ist Satz 16  
(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und beschränkt  
Da  $A$  beschränkt,  $\exists$  abgeschlossener Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  mit  
 $A \subset Q$   
Satz 15  $\Rightarrow Q$  kompakt  
Satz 17  $\Rightarrow A$  kompakt

**Satz 18:** Sei  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  stetige Abbildung metrischer Räume  
 $K \subset \mathbb{X}$  kompakt  $\Rightarrow f(K) \subset \mathbb{Y}$  kompakt

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in \mathbb{I}}$  offene Überdeckung von  $f(K)$   
 $f$  stetig  $\stackrel{\text{Satz 13}}{\Rightarrow} (f^{-1}(U_i))_{i \in \mathbb{I}}$  offene Überdeckung von  $K$   
 $K$  kompakt  $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k$ , so dass  $K \subset \bigcup_{v=1}^k f^{-1}(U_{i_v})$   
 $\Rightarrow f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{v=1}^k f^{-1}(U_{i_v})\right) = \bigcup_{v=1}^k f(f^{-1}(U_{i_v})) = \bigcup_{v=1}^k U_{i_v}$

**Satz 19:** Sei  $\mathbb{X}$  kompakter metrischer Raum,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  
 $\Rightarrow f$  ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.  
(d.h.  $\exists p, q \in \mathbb{X}$  mit  $\left\{ \begin{array}{l} f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{X}\} \\ f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{X}\} \end{array} \right.$ )

**Beweis:** Satz 18  $\Rightarrow f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{R}$  kompakt  
Heine-Borel  $\Rightarrow f(\mathbb{X})$  beschränkt und abgeschlossen  
Da  $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{R}$  beschränkt  $\Rightarrow \sup(f(\mathbb{X})), \inf(f(\mathbb{X}))$  sind endlich  
Definition von sup  $\Rightarrow \exists x_n \in f(\mathbb{X})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sup(f(\mathbb{X}))$   
 $f(\mathbb{X})$  abgeschlossen  $\stackrel{\text{Satz 6}}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \in f(\mathbb{X})$   
Analog für  $\inf(f(\mathbb{X}))$

**Satz von Bolzano-Weierstraß:**

Sei  $A$  kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes  $\mathbb{X}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (beliebig) eine Folge von Punkten in  $A$ .

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen einen Punkt von  $A$  konvergiert.

**Beweis:** (indirekt)

Angenommen: Keine Teilfolge von  $(x_n)$  konvergiert gegen einen Punkt von  $A$   
 $\Rightarrow$  Jeder Punkt  $x \in A$  besitzt offene Umgebung  $\mathbb{U}_x$ , in der nur endlich viele  $x_n$  liegen.

(denn falls in jeder Umgebung von  $x$  liegen unendlich viele Punkte von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so könnte man Teilfolge konstruieren, die gegen  $x$  konvergiert.)

Gilt:  $A \subset \bigcup_{x \in A} \mathbb{U}_x$

Da  $A$  kompakt,  $\exists$  endlich viele  $y_1, \dots, y_n \in A$ , so dass

$$A \subset \mathbb{U}_{y_1} \cup \dots \cup \mathbb{U}_{y_n}$$

Jedes der  $\mathbb{U}_{y_i}$  enthält nur endlich viele  $x_n$

$\Rightarrow A$  enthält nur endlich viele  $x_n$

$\Rightarrow (x_n)$  besitzt konstante Teilfolge ⚡

**Definition:** Eine Abbildung  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  metrischer Räume heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ , so dass

$$d(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \forall x, x' \text{ mit } d(x, x') < \delta$$

**Satz 20:** Sei  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  stetige Abbildung metrischer Räume und  $\mathbb{X}$  kompakt  
 $\Rightarrow f$  gleichmäßig stetig

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$

Da  $f$  stetig in  $\mathbb{X} \Rightarrow$  zu jedem  $\xi \in \mathbb{X} \quad \exists r(\xi) > 0$ , so dass

$$d(f(\eta), f(\xi)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \eta \in B(\xi, r(\xi))$$

$$\bigcup_{\xi \in \mathbb{X}} B\left(\xi, \frac{1}{2}r(\xi)\right) \supset \mathbb{X} \text{ kompakt}$$

$\Rightarrow \exists \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{X}$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^k B\left(\xi_j, \frac{1}{2}r(\xi_j)\right) \supset \mathbb{X}$

Sei  $\delta := \frac{1}{2} \min(r(\xi_1), \dots, r(\xi_k))$

Seien weiter  $x, x' \in \mathbb{X}$  mit  $d(x, x') < \delta$

z.Z.  $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$

$\exists j \in \{1, \dots, k\}$ , so dass  $x \in B(\xi_j, \frac{1}{2}r(\xi_j))$

$\Rightarrow x' \in B(\xi_j, r(\xi_j))$

d.h.  $d(f(x), f(\xi_j)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(f(x'), f(\xi_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$d(f(x), f(x')) \stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} d(f(x), f(\xi_j)) + d(f(\xi_j), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

## §2 Kurven in $\mathbb{R}^n$

**Definition:** Sei  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  Intervall (endlich oder unendlich)

Eine Kurve in  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetige Abbildung  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

Klar ist:  $f$  stetig  $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

Die Kurve  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **differenzierbar**

$\Leftrightarrow f_1, \dots, f_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  sind **differenzierbare Funktionen**

**Beispiele:** (1) Sei  $a \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto vt + a \end{cases} \text{ Gerade in } \mathbb{R}^n$$

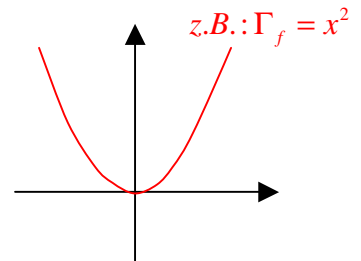
durch den Punkt  $a$  mit Richtungsvektor  $v$

(2)  $a > 0, \quad b > 0 \quad f : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{cases}$   
 = Ellipse mit Hauptachsen  $a, b$

(3)  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (a \cos t, b \sin t, t) \end{cases}$  Schraubenlinie über einer Ellipse

(4)  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktion auf  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$$\Gamma_f := \begin{cases} \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, f(t)) \end{cases} \text{ Graph von } f$$

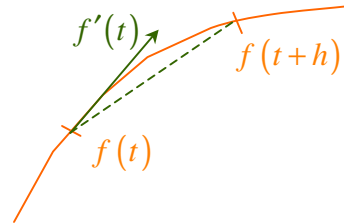


**Definition:** Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbare Kurve. Für  $t \in \mathbb{I}$  heißt

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)) \in \mathbb{R}^n \text{ der } \mathbf{Tangentenvektor} \text{ von } f \text{ in } t$$

Ist  $f'(t) \neq 0$ , so heißt  $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$  der **Tangenten-Einheitsvektor** in  $t$

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$



**Definition:** Gilt für eine Kurve  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$   $f(t_1) = f(t_2)$  mit  $t_1 < t_2$ , so heißt

$f(t_1)$  **Doppelpunkt** der Kurve

**Beispiel:**

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-1) = (0, 0) = f(1)$$

also  $(0, 0)$  ist Doppelpunkt von  $f$

$$f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$$

$$\Rightarrow f'(-1) = (-2, 2)$$

$$f'(1) = (2, 2)$$

Also: Eine Kurve kann in einem Doppelpunkt mehrere Tangentenvektoren haben.

**Behauptung:**  $f(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$

$$" \subseteq " \quad y^2 = (t^3 - t)^2 = t^6 - 2t^4 + t^2$$

**Beweis:**

$$\| \quad x^3 + x^2 = (t^2 - 1)^3 + (t^2 - 1)^2 = t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 + t^4 - 2t^2 + 1 = t^6 - 2t^4 + t^2$$

**Definition:** Sei  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbare Kurve

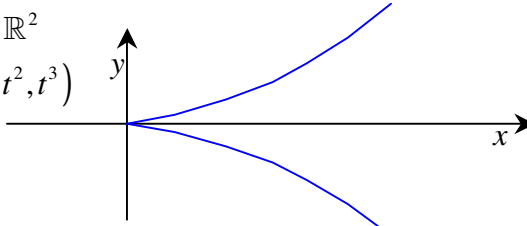
$f$  heißt **regulär**, falls  $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{I}$

$f$  heißt **singulär** in  $t$ , falls  $f'(t) = 0$

Beispiele: Neilsche Parabel:  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t^2, t^3) \end{cases}$

$f'(t) = (2t, 3t^2)$

insbesondere  $f'(0) = (0, 0)$



d.h. 0 ist singulärer Punkt

$$f(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

$$f(b) = f(t_3)$$

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  Kurve und  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

Sei weiter  $\overline{f(t_{i-1}), f(t_i)}$  die Gerade, die  $f(t_{i-1})$  und  $f(t_i)$  verbindet  $f(t_2)$

$\Rightarrow \overline{f(t_0), f(t_1)}, \overline{f(t_1), f(t_2)}, \dots, \overline{f(t_{k-1}), f(t_k)}$  ist ein Polygonzug in  $\mathbb{R}^n$

Seine Länge ist:  $P_f(t_0, \dots, t_k) := \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$

$$f(a) = f(t_0)$$

**Definition:** Eine Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **rektifizierbar** mit der Länge  $L$

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ , so dass für jede Unterteilung  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$  der Feinheit  $\leq \delta$

gilt:  $|P_f(t_0, \dots, t_k) - L| < \varepsilon$

Mit anderen Worten: Länge von  $f =$  Grenzwert der Länge von Polygonzügen, falls die Feinheit gegen 0 geht.