

# Analysis II

Lange

Sommersemester 2004

Vorlesung 5

Mittwoch, 5. Mai 2004

**Definition:** Eine Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **rektifizierbar** mit Länge  $L$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass gilt:

Für jede Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  der Feinheit  $\leq \delta$  gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - L \right| < \varepsilon$$

**Satz 1:** Jede stetig differenzierbare Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist rektifizierbar und für ihre

Länge  $L$  gilt:  $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

**Lemma:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| < \varepsilon \quad \forall t, \tau \in [a, b] \text{ mit } 0 < |t - \tau| < \delta$$

**Beweis:**

(des Lemmas)

1. Fall  $n = 1$

$f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf kompaktem Intervall  $[a, b]$

$\Rightarrow f'$  gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass gilt:

$$\|f'(t) - f'(\tau)\| < \varepsilon \quad \forall t, \tau \text{ mit } |t - \tau| < \delta$$

Seien nun  $t, \tau \in [a, b]$  mit  $0 < |t - \tau| < \delta$

Nach MWS  $\exists s \in (t, \tau)$ , so dass

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} &= f'(s) \\ \Rightarrow \left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| &= \|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

2. Fall  $n$  beliebig,  $f = (f_1, \dots, f_n)$

**Bemerkung:** Sei  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_{i=1}^n |v_i|^2} = \sqrt{n} \max_{i=1}^n |v_i|$$

Fall 1  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass gilt:

$\forall i = 1, \dots, n$

$$\left| \frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} - f'_i(t) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall t, \tau \text{ mit } |t - \tau| < \delta$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \stackrel{Bem}{\leq} \sqrt{n} \max_{i=1}^n \left| \frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} - f'_i(t) \right| < \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon$$

**Beweis von Satz 1:** Nach Satz über Approximation des (Riemann-)Integrals durch Riemannsche Summen (Vgl. Analysis I) gibt es zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_1 > 0$ , so dass

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \star$$

für jede Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  der Feinheit  $\leq \delta_1$ .

Lemma  $\Rightarrow$  Zu  $\varepsilon > 0 \exists \delta$  mit  $0 < \delta \leq \delta_1$ , so dass gilt:

Hat die Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  Feinheit  $< \delta$ , so gilt:

$$\left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \|f(t_i) - f(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1}) f'(t_i)\| \quad \star\star$$

$$= |t_{i-1} - t_i| \left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\| \leq |t_i - t_{i-1}| \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$\star$  und  $\star\star \Rightarrow$  Für jede Unterteilung der Feinheit  $< \delta$  gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| = \\ & = \left| \left( \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right) + \left( \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \right) \right| \\ & \leq \left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^k \left| \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) - \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \right| \\ & \stackrel{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^k \underbrace{|f(t_i) - f(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1}) f'(t_i)|}_{\star\star} \\ & \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{(t_i - t_{i-1}) \varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{b-a}{b-a} \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

**Beispiel:** Sei  $\varphi > 0 \quad f : \begin{cases} [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{cases}$  Einheitskreisbogen von 0 bis  $\varphi$

Es gilt:  $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\Rightarrow \|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$L = \int_0^\varphi \|f'(t)\| dt = \int_0^\varphi 1 dt = \varphi$$

Insbesondere ist die Länge des Einheitskreises gleich  $2\pi$ .

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  Kurve und  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  Intervall

Sei weiter  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  bijektiv und stetig

$\Rightarrow g := f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Kurve in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\text{Im } g = \text{Im } f$

Definition: Man sagt,  $g$  geht aus  $f$  durch die Parametertransformation  $\varphi$  hervor.

Sind  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  stetig differenzierbar, so spricht man von einer

**$C^1$ -Parametertransformation.**

Ist  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  eine  $C^1$ -Parametertransformation, so ist entweder

a)  $\varphi$  ist streng monoton wachsend

dann heißt  $\varphi$  **orientierungstreu**

oder

b)  $\varphi$  ist streng monoton fallend

dann heißt  $\varphi$  **orientierungsumkehrend**

**Satz 2:** Für eine  $C^1$ -Parametertransformation  $\varphi$  sind äquivalent:

(i)  $\varphi$  ist orientierungstreu (bzw. orientierungsumkehrend)

(ii)  $\varphi'(t) > 0$  (bzw.  $\varphi'(t) < 0$ )  $\forall t$

Beweis: Es ist  $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$

$$\Rightarrow (\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ monoton steigend ... TRIVIAL!}$$

**Satz 3:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbare Kurve und

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^1$ -Parametertransformation.

Dann gilt für  $g = f \circ \varphi$ :

$$g'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Die Tangentenvektoren von  $g$  in  $t$  und von  $f$  in  $\varphi(t)$  unterscheiden sich nur um den skalaren Faktor  $\varphi'(t)$

Wie hängt die Länge der Kurve von der Parametrisierung ab?

**Satz 4:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbare Kurve und  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$

eine  $C^1$ -Parametertransformation,  $g := f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\| d\tau$$

Beweis: Für den Fall, dass  $\varphi$  orientierungstreu ist, d.h.  $\varphi'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta]$

(für orientierungsumkehrend siehe Forster)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \\ \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \|g'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|f'(\varphi(\tau))\| \varphi'(\tau) d\tau \\ \text{Substregel} \int_a^b \|f'(t)\| dt \end{aligned} \quad \left\| \begin{array}{l} t = \varphi(\tau) \\ dt = \varphi'(\tau) d\tau \end{array} \right.$$

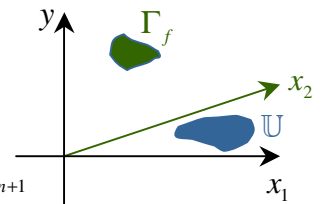
## §3 Partielle Differenzierbarkeit

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Betrachte Abbildung:

$$f: \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Graph von  $f = \Gamma_f := \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(x), x = (x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$f$  stetig  $\Leftrightarrow f$  ist als Abbildung metrischer Räume stetig

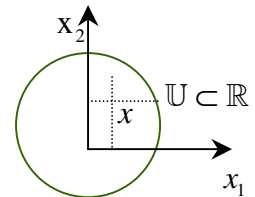


**Definition:**  $f$  heißt im Punkt  $x \in U$  **partiell differenzierbar nach  $x_i$**

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h} \quad \exists$$

Hierbei ist  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  der  $i$ -te Einheitsvektor  
Ausgeschrieben ist

$$f(x + h \cdot e_i) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)$$



**Bezeichnung:**  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \quad (= D_i f(x))$

heißt  **$i$ -te partielle Ableitung** von  $f$  im Punkt  $x$ .

Die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $x$  kann man als gewöhnliche Ableitung einer Funktion 1 Variablen auffassen.

Sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  fest in  $U$  und  $f_i(\xi) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = \frac{df_i}{d\xi}(x_i)$$

$\Rightarrow$   $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $x =$  gewöhnliche Ableitung von  $f_i$  in  $x_i$

$\Rightarrow$  Für partielle Ableitungen gelten die üblichen Rechenregeln, d.h. Produktformel etc.

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **partiell differenzierbar**,

wenn  $\forall x \in U$  und  $\forall i = 1, \dots, n$  die  $i$ -te partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$  existiert.

Dann ist  $\frac{\partial}{\partial x_i} f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine neue Funktion  $\forall i = 1, \dots, n$