

Beispiele: 1) $r \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\| \end{cases}$

Behauptung: r ist in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r(x)} \quad \forall x \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Beweis: Seien $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest und wir betrachten:

$$f(\xi) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + \xi^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{df}{d\xi}(x_i) = \frac{1}{2} \frac{2\xi}{\sqrt{x_1^2 + \dots + \xi^2 + \dots + x_n^2}} \Big|_{\xi=x_i} = \frac{x_i}{r(x)}$$

2) Definition: $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{r(x)^{2n}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Behauptung: F ist partiell differenzierbar auf ganz \mathbb{R}^n
Aber F nicht stetig (in 0)

Beweis: (a) In $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist F partiell differenzierbar:

Für $x \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial x_i} \frac{1}{r(x)^{2n}} + (x_1 \dots x_n) \frac{\partial \left(\frac{1}{r(x)^{2n}} \right)}{\partial x_i} = \\ &= \frac{x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n}{r(x)^{2n}} + x_1 \dots x_n (-2n) r(x)^{-2n-1} \frac{x_i}{r(x)} = \\ &= \frac{x_1 \dots x_i \dots x_n}{r(x)^{2n}} - 2n \frac{x_1 \dots x_{i-1} \cdot x_i^2 \cdot x_{i+1} \dots x_n}{r^{2n+2}} \end{aligned}$$

(b) F ist in $x = 0$ partiell differenzierbar

Beweis:
$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h e_i) - F(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \dots 0 \cdot h \cdot 0 \dots 0}{h^{2n}} - 0 \stackrel{\exists}{=} 0 \end{aligned}$$

(c) F ist in $x = 0$ nicht stetig

Beweis: Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_k = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k} \right)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) = 0$$

Wäre F in 0 stetig, so wäre $\lim_{k \rightarrow \infty} F(a_k) = F(0) = 0$

Aber:

$$F(a_k) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\left(\sqrt{\frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2}}\right)^{2n}} = \frac{\frac{1}{k^n}}{(\sqrt{n})^{2n} \frac{1}{k^{2n}}} = \frac{k^{2n}}{n^n k^n} = \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} F(a_k) = \infty \neq 0$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar

$$\text{grad } f(x) := \nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

heißt **Gradient** von f im Punkt x .

Beispiel:
$$\text{grad } r(x) = \frac{x}{r(x)} = \left(\frac{x_1}{r(x)}, \dots, \frac{x_n}{r(x)} \right)$$

Satz 1: Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar
 $\Rightarrow f \cdot g$ partiell differenzierbar und es gilt:

$$\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) \cdot g + f \cdot \text{grad}(g)$$

Beweis: Das gilt für partielle Ableitungen

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** auf U ist eine Abbildung: $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

Insbesondere $\text{grad } f : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \text{grad } f(x) \end{cases}$ heißt **Gradientenvektorfeld** von f

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares **VF** auf U .

(d.h. alle Komponentenfunktionen v_i sind stetig partiell differenzierbar)

Die Funktion $\text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ heißt **Divergenz** des **VF** v

Satz 2: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbares **VF**.
 $\Rightarrow \text{div}(fv) = \langle \text{grad } f, v \rangle + f \cdot \text{div}(v)$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fv_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i + f \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \text{div}(fv) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(fv_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + \sum_{i=1}^n f \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$= \langle \text{grad } f, v \rangle + f \text{div}(v)$$

Beispiel:
$$F \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{x}{r(x)} \end{cases} \quad \text{wo } r(x) = \|x\|$$

$$\operatorname{div}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1 + \dots + 1 = n$$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = r(x)^2$$

Satz 2 $\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{x}{r}\right) = \left\langle \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right), x \right\rangle + \frac{1}{r} \operatorname{div}(x)$

$$= \left\langle -\frac{x}{r^3}, x \right\rangle + \frac{n}{r} = -\frac{1}{r^3} r^2 + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x_i} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{1}{r^2} \frac{x_i}{r} = \\ &= -\frac{x_i}{r^3} \Rightarrow \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \geq 1$. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (f) \right) \right) \right) \quad \forall 1 \leq i_v \leq n \quad v=1, \dots, k$$

partiell differenzierbar sind.

Also: $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal partiell differenzierbar

$$\Leftrightarrow f \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ sind partiell differenzierbar}$$

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal partiell differenzierbar

Es existieren also $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} := \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} := \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)$

Frage: Sind sie gleich?

Definition: $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig partiell differenzierbar, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Satz 3: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \quad \forall 1 \leq i_1, i_2 \leq n$$

Beweis: Es genügt die Gleichung an einer Stelle $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ nachzuweisen.

Analysis II

Lange

Sommersemester 2004

Vorlesung 6

Montag, 10. Mai 2004

Indem wir die Stellen $a_1, \dots, a_{i_1}, \dots, a_{i_2}, \dots, a_n$ festhalten, genügt es, die Gleichung für

die Funktion: $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{U}' \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_{i_1}, x_{i_2}) \mapsto f(a_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, a_n) \end{cases}$ zu beweisen.

$\exists \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ $f : \begin{cases} \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{cases}$

weiter $\exists a = (0, 0)$ (Sonst ändere f um eine Translation ab)

Da $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\exists \delta > 0$, so dass

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \delta, |y| < \delta\} \subset \mathbb{U}$ (Quadrat um den Ursprung)

Für $|y| < \delta$ sei $F_y : \begin{cases} (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, y) - f(x, 0) \end{cases}$

MWS $\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < |x|$, so dass

$$\frac{F_y(x) - F_y(0)}{x - 0} = F_y'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow F_y(x) - F_y(0) = F_y'(\xi) \cdot x \quad \star$$

$$\text{Nun ist } F_y'(\xi) = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, 0)$$

MWS angewandt auf die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \cdot) : \begin{cases} (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \end{cases}$

Liefert: $\exists \eta \in \mathbb{R}$ mit $|\eta| < |y|$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) \cdot y \quad \star\star$$

Aus \star und $\star\star \Rightarrow$

$$f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = F_y(x) - F_y(0)$$

$$\star \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, 0) \right) \cdot x = \star\star \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) \cdot x \cdot y \quad \star$$

Andersherum: Wenden MWS an auf

$$G_x : \begin{cases} (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f(x, y) - f(0, y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{\eta} \in \mathbb{R} \text{ mit } |\tilde{\eta}| < |y| \text{ mit } G_x(y) - G_x(0) = G_x'(\tilde{\eta}) \cdot y$$

und weiter $\exists \tilde{\xi} \in \mathbb{R}$ mit $|\tilde{\xi}| < |x|$ mit

$$f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot x \cdot y \quad \star\star$$

Aus \star und $\star\star \Rightarrow \forall x, y$ mit $x \cdot y \neq 0$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

wobei (ξ, η) und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ von (x, y) abhängen:

Für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gilt auch $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (0, 0)$

Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$ und $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$ stetig sind

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)$$

Setzt man allgemein für $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} (f) \right) \right) \right)$$

so erhält man durch Induktion:

Korollar 1: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig partiell differenzierbar.

Dann gilt für jede Permutation σ der Zahlen $1, \dots, k$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \dots \partial x_{\sigma(i_k)}}$$

Rotation: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbare VF

Definition: Das VF $\text{rot } v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert durch:

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Korollar 2: $f : \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar

$$\Rightarrow \text{rot grad } f = 0$$

Beweis: $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$

$$\Rightarrow \text{rot grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) =$$

$$= (0, 0, 0)$$

$\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar

$$\Delta f := \text{div grad } f = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

Δ ist Laplace-Operator

Definition Sei $C^k(\mathbb{U}) := \{k\text{-mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf } \mathbb{U}\}$

$= \mathbb{R}$ -Vektorraum ($\dim = \infty$)

$\Delta : C^2(\mathbb{U}) \rightarrow C^0(\mathbb{U})$ heißt **Laplace-Operator**

Die DGL $\Delta f = 0$ heißt **Potentialgleichung**.

Jede Funktion f mit $\Delta f = 0$ heißt **harmonische Funktion**.