§4 Totale Differenzierbarkeit

In Analysis I §9 Satz 1:

$f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ und eine in x stetige Funktion $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = 0$, so dass gilt:

$$f(x+\xi) = f(x) + c\cdot\xi + \psi(x+\xi)\cdot\xi$$

$\Leftrightarrow \exists$ lineare Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine in einer Umgebung von 0 definierte Funktion φ, so dass gilt:

$$f(x+\xi) = f(x) + c\cdot\xi + \varphi(x) \quad \forall \xi \in \mathbb{V} \qquad \text{mit } \lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} = 0$$

Beweis: $\varphi(\xi) := \psi(x+\xi)\cdot\xi$

$$\Rightarrow \lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} = \lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\psi(x+\xi) = \psi(x)$$

Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ Abbildung

Definition: f in $x \in \mathbb{U}$ (total) differenzierbar

$:\Leftrightarrow \exists$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine in einer Umgebung $\mathbb{V}$ von $0\,(\subset \mathbb{R}^n)$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$f(x+\xi) = f(x) + A\cdot\xi + \varphi(\xi) \quad (\forall \xi \in \mathbb{V}) \ \star$$

$$\text{mit } \lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

Bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ist die Matrix A gegeben durch:

$$A = (a_{ij}) \in M(m\times n, \mathbb{R})$$

Ist $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$, so ist $A\xi = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^m$

Ist $f = \begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ und $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_m\end{pmatrix}$ so besagt $\star$

$$f_i(x+\xi) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j + \varphi_i(\xi) \quad \forall i = 1,\dots,m$$

Satz 1: Äquivalent sind für $f = \begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m,\ \ x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$

1. f ist differenzierbar in x
2. f_i ist differenzierbar in $x \quad \forall i = 1,\dots,m$

Beispiel: $C=(c_{ij})\in M(n\times n,\mathbb{R})$ symmetrisch

$$q:\begin{cases}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\langle x,Cx\rangle\end{cases}:=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j$$

Behauptung: q ist differenzierbar mit $x\in\mathbb{R}^n$

Beweis:
$$q(x+\xi)=\langle x+\xi,C(x+\xi)\rangle$$
$$=\langle x,Cx\rangle+\langle x,C\xi\rangle+\langle\xi,Cx\rangle+\langle\xi,C\xi\rangle$$
$$=q(x)+\langle Cx,\xi\rangle+\langle Cx,\xi\rangle+q(\xi)$$
$$=q(x)+a^t\cdot\xi+\varphi(\xi)$$

mit $a:=2Cx,\quad\varphi(\xi)=q(\xi)=\langle\xi,C\xi\rangle$

wegen $\|\varphi(\xi)\|=\|\langle\xi,C\xi\rangle\|\le\|\xi\|\cdot\|C\xi\|$ - Schwartzsche Ungleichung

$$\le\|\xi\|\cdot\|C\|\cdot\|\xi\|$$
$$\Rightarrow\lim_{\xi\to0}\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}=\lim_{\xi\to0}\|C\|\cdot\|\xi\|=0$$
$$\Rightarrow\lim_{\xi\to0}\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}=0$$

Satz 2: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}^m$ in $x\in\mathbb{U}$ differenzierbar

Also: $f(x+\xi)=f(x)+A\cdot\xi+\varphi(\xi)$ mit $A=(a_{ij})\in M(m\times n,\mathbb{R})$

und $\varphi:\mathbb{V}\to\mathbb{R}^m$ mit $\lim\limits_{\xi\to0}\dfrac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}=0$

Dann gilt:

a) f stetig in x

b) Alle Komponenten $f_i:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ von f sind in x partiell differenzierbar mit $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)=a_{ij}$

Also: A ist gerade die Matrix der partiellen Ableitungen

Definition: $\mathrm{D}f:=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ heißt das **Differential** der Abbildung f

oder die **Jacobi-Matrix** von f
oder die **Funktionalmatrix** von f

Beweis: a) $\lim\limits_{\xi\to0}A\cdot\xi=0$ und $\lim\limits_{\xi\to0}\varphi(\xi)=0$

☆ $\Rightarrow\lim\limits_{\xi\to0}f(x+\xi)=f(x)+0+0=f(x)$

b) Für $i=1,\dots,m$ ist $f_i(x+\xi)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j+\varphi_i(\xi)$

mit $\lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi_i(\xi)}{\|\xi\|}=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f_i(x+he_j)-f_i(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a_{ij}h+\varphi_i(he_j)}{h}=$$

$$=a_{ij}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_i(he_j)}{h}}_{=0}=a_{ij}$$

Satz 3: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen und $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar
$\Rightarrow f$ total differenzierbar

Beweis: Es genügt die Behauptung an einer beliebigen Stelle $x\in\mathbb{U}$ zu zeigen.
$\mathbb{U}$ offen und $\exists\delta>0$, so dass $B(x,\delta)\subset\mathbb{U}$

Sei $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ mit $\|\xi\|<\delta$

Sei $z^{(i)}:=x+\sum_{\nu=1}^{i}\xi_\nu e_\nu$ für $i=0,\dots,n$

Also: $z^{(0)}=x$
$z^{(n)}=x+\xi$

$z^{(i)}$ und $z^{(i-1)}$ unterscheiden sich nur in der i-ten Komponente
MWS (für eine Variable) $\Rightarrow\exists\theta_i\in(0,1)$, so dass

$$\frac{f\left(z^{(i)}\right)-f\left(z^{(i-1)}\right)}{\xi_i-0}=\frac{\partial}{\partial x_i}f\left(z^{(i-1)}+\theta_i\xi_ie_i\right)$$

$$\Rightarrow f\left(z^{(i)}\right)-f\left(z^{(i-1)}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}f\left(z^{(i-1)}+\theta_i\xi_ie_i\right)\xi_i$$

$$\Rightarrow f(x+\xi)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(z^{(i)}\right)-f\left(z^{(i-1)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f\left(z^{(i-1)}+\theta_i\xi_ie_i\right)\xi_i$$

Setzt man $a_i=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)$, so ist

$$f(x+\xi)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\left(z^{(i-1)}+\theta_i\xi_ie_i\right)-a_i\right)\cdot\xi_i}_{=:\varphi(\xi)}$$

zu Zeigen: $\lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}=0$

Da $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ stetig in x, gilt:

$$\lim_{\xi \to 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i\right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = a_i$$

$$\Rightarrow \lim_{\xi \to 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(z^{(i-1)} + \theta_i \xi_i e_i\right) - a_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \qquad \square$$

Korollar: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar
$\Rightarrow f$ stetig

Beweis: f total differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig

Also: f stetig partiell differenzierbar
$\Rightarrow f$ total differenzierbar
$\Rightarrow f$ partiell differenzierbar

Kurz: f stetig differenzierbar $\Leftrightarrow f$ stetig partiell differenzierbar

Kettenregel: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ offen
$g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^k$ mit $f(\mathbb{V}) \subset \mathbb{U}$

Anmerkung: g ist in $x \in \mathbb{U}$ differenzierbar
f ist in $y = g(x)$ differenzierbar

$\Rightarrow f \circ g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^k$ in $x \in \mathbb{U}$ differenzierbar und für ihr Differential gilt:

$$\mathrm{D}(f \circ g) = \mathrm{D}\left(f\left(g(x)\right)\right) \cdot \mathrm{D}\, g(x)$$

Beweis: Sei $A := \mathrm{D}\, g(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) \right)_{i,k}$, $\quad B := \mathrm{D}\, f(y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) \right)_{ij}$

z.Z.: $\mathrm{D}(f \circ g)(x) = B \cdot A$

g differenzierbar in $x \Leftrightarrow g(x+\xi) = g(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi)$

$$\text{mit} \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

f differenzierbar in $y = g(x) \Leftrightarrow f(y+\eta) = f(y) + B\eta + \psi(\eta)$

$$\text{mit} \lim_{\xi \to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0$$

Insbesondere gilt das für:

$$\eta := g(x+\xi) - g(x) = A\xi + \varphi(\xi)$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x+\xi) = f\left(g(x+\xi)\right) = f\left(g(x) + \eta\right)$$

$$\overset{\star}{=} f\left(g\left(x\right)\right) + B\eta + \psi\left(\eta\right)$$
$$\overset{\star\star}{=} \left(f \circ g\right)\left(x\right) + BA\xi + \underbrace{B\varphi\left(\xi\right) + \psi\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)}_{\chi(\xi)}$$

z.Z.: $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\chi\left(\xi\right)}{\left\|\xi\right\|} = 0$

Beweis: $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{B\varphi\left(\xi\right)}{\left\|\xi\right\|} = 0$

und $\exists K > 0$, so dass

$$\left\|\varphi\left(\xi\right)\right\| \le K\left\|\xi\right\| \qquad \forall \xi \in \text{Umgebung von } 0$$

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\psi\left(\eta\right)}{\left\|\eta\right\|} = 0 \Leftrightarrow \psi\left(\eta\right) = \left\|\eta\right\| \cdot \psi_1\left(\eta\right) \star\star\star$$

mit $\lim\limits_{\eta \to 0} \psi_1\left(\eta\right) = 0$

$$\Rightarrow \left\|\psi\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)\right\| = \left\|A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right\| \cdot \left\|\psi_1\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)\right\|$$
$$\le \left(\left\|A\xi\right\| + \left\|\varphi\left(\xi\right)\right\|\right) \cdot \left\|\psi_1\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)\right\|$$
$$\le \left(\left\|A\right\| \cdot \left\|\xi\right\| + K\left\|\xi\right\|\right)\left\|\psi_1\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)\right\|$$
$$= \left\|\xi\right\|\left(\left\|A\right\| + K\right) \cdot \left\|\psi_1\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)\right\|$$
$$\Rightarrow \lim_{\xi \to 0} \frac{\chi\left(\xi\right)}{\left\|\xi\right\|} = \lim_{\xi \to 0} \frac{B\varphi\left(\xi\right)}{\left\|\xi\right\|} + \lim_{\xi \to 0} \frac{\psi\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)}{\left\|\xi\right\|} =$$
$$= 0 + \left(\left\|A\right\| + K\right) \underbrace{\lim_{\xi \to 0} \psi_1\left(A\xi + \varphi\left(\xi\right)\right)}_{=0 \; \star\star\star}$$