Kettenregel: Seien $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ offen,
(Spezialfall)

$$f:\begin{cases}\mathbb{V} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(y)\end{cases} \text{ und } g=\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}:\begin{cases}\mathbb{U} \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto y=g(x)\end{cases} \text{ differenzierbar mit } g(\mathbb{U}) \subset \mathbb{V}$$

$\Rightarrow h := f \circ g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}\left(g_i(x),\dots,g_m(x)\right)\cdot\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$$

Beweis:

$$\mathrm{D}\,h(x)=\mathrm{D}\,f\left(g(x)\right)\cdot\mathrm{D}\,g(x)$$

Matrizenmultiplikation

$$\mathrm{D}\,f\left(g(x)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(g(x)\right),\dots,\frac{\partial f}{\partial y_m}\left(g(x)\right)\right)$$

$$\mathrm{D}\,g(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}\,h(x)=\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial h}{\partial x_n}(x)\right)$$

Matrizenmultiplikation $\Rightarrow$ Behauptung

Definition: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit

$x \in \mathbb{U}$ und $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|=1$

$$\mathrm{D}_v\,f(x)=\frac{d}{dt}f(x+tv)\Big|_{t=0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t-0}$$ heißt **Richtungsableitung** von *f* in Richtung v.

Spezialfall: $v=e_i \Rightarrow D_v f(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=: D_i f(x)$

Satz 4: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig differnzierbar

$\Rightarrow$ Für $x \in \mathbb{U}$ und $v = \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|=1$ gilt:

$$\mathrm{D}_v\,f(x)=\langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle$$

Beweis:

$$g:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto g(t)=(x+tv)=(x_1+tv_1,\dots,x_n+tv_n)\end{cases}$$

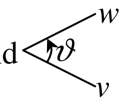
$\mathbb{U}$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon>0$, so dass $g\left((-\varepsilon,\varepsilon)\right) \subset \mathbb{U}$

$\Rightarrow h := f \circ g : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Kettenregel $\Rightarrow \mathrm{D}_v\,f(x)=\frac{d}{dt}f(x+tv)\Big|_{t=0}=\frac{dh}{dt}(0)$

$$\overset{\text{KR}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(0)) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial t}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i = \langle v, \operatorname{grad} f(x) \rangle$$

Bedeutung des Skalarprodukts:

Sind $0 \neq v, w \in \mathbb{R}^n$ und 
der Zwischenwinkel, so ist $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\vartheta$

Also: $\mathrm{D}_v f(x) = \langle v, \operatorname{grad} f(x) \rangle = \|v\| \cdot \|\operatorname{grad} f(x)\| \cdot \cos\vartheta$

$= \|\operatorname{grad} f(x)\| \cdot \cos\vartheta$, wo $\vartheta =$ Zwischenwinkel von v und $\operatorname{grad} f(x)$

$$\Rightarrow \mathrm{D}_v f(x) \text{ ist} \begin{cases} \text{maximal, wenn} & \cos\vartheta = 1 \Leftrightarrow \vartheta = 0 \\ \text{minimal, wenn} & \cos\vartheta = -1 \Leftrightarrow \vartheta = \pi \end{cases}$$

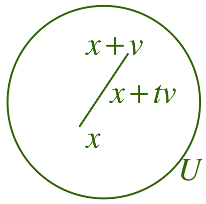
$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad} f(x) \text{ ist die Richtung des stärksten Anstiegs von } f}$

MWS: (für Funktionen $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$)

Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Sei $x + tv \in \mathbb{U} \quad \forall 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow \exists \tau \in (0,1)$ mit $f(x+v) - f(x) = \mathrm{D} f(x + \tau v) \cdot v$



Beweis: $g(t) = x + tv$

$$h = \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto h(t) = f(g(t)) = f(x+tv) \end{cases}$$

MWS 1. Variable (Vgl. Analysis I)

$$\Rightarrow \exists \tau \in (0,1), \text{ so dass } \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(\tau)$$

$$f(x+v) - f(x) = \frac{h(1)-h(0)}{1-0}, \qquad h'(\tau) = \mathrm{D} f(x + \tau v) \cdot \frac{dg}{dt}(\tau) = \mathrm{D} f(x + \tau v) \cdot v$$

Auf die Abbildung $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ lässt sich der MWS in dieser Form nicht verallgemeinern.
Aber in anderer Form:
Sei $f : [x, x+v] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in \mathbb{R}$, $v > 0$

MWS: $$f(x+v) - f(x) = \int_x^{x+v} f'(u)\, du = \left(\int_0^1 f'(x + vt) \right) dt \cdot v$$

Substitution: $u = x + vt$
$du = v\,dt$

Also der Wert von f' an der Stelle τ wird ersetzt durch einen Mittelwert der Ableitung.

Sei $F := \left(f_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ mit $f_{ij}:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Matrix von Funktionen

Definition: $\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_{ij}(t)\,dt\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$

Mittelwertsatz: (Für Abbildung $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}^m$)

Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Abbildung

$\Rightarrow$ Sei $x+tv\subset\mathbb{U}\quad\forall 0\le t\le 1$

$$\Rightarrow f(x+v)-f(x)=\left(\int_0^1 \mathrm{D}f(x+tv)\,dt\right)\cdot v \quad \text{(Matrizenmultiplikation)}$$

Beweis: Sei $f=(f_1,\dots,f_m)$ und $g(t)=x+tv$

$h(t):=f(g(t))\cdot[0,1]\to\mathbb{R}^m$
$h=(h_1,\dots,h_m)$ mit $h_i(t)=f_i(g(t))$

$$\Rightarrow f_i(x+v)-f_i(x)=h_i(1)-h_i(0)\overset{(*)}{=}\int_0^1 h_i'(t)\,dt\cdot 1$$

$$\overset{\text{KR}}{=}\int_0^1\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+tv)\cdot v_j\right)dt$$

$$=\sum_{j=1}^n\left(\int_0^1\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+tv)\,dt\right)\cdot v_j\qquad\forall i=1,\dots,n$$

$$\mathrm{D}f=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

Sei $A=\left(a_{ij}\right)\in M(m\times n,\mathbb{R})\ \Rightarrow\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\left|a_{ij}\right|^2}$

Lemma 5: Sei $g:\begin{cases}[a,b]\to\mathbb{R}^m\\ t\mapsto g(t)\end{cases}$ stetig differenzierbar

$$\Rightarrow\left\|\int_a^b g(t)\,dt\right\|\le\int_a^b\left\|g(t)\right\|dt$$

Beweis: Sei $u:=\int_a^b g(t)\,dt\in\mathbb{R}^m$ und $K:=\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$

$$\Rightarrow K^2=\langle u,u\rangle=\left\langle\int_a^b g(t)\,dt,u\right\rangle=\int_a^b\langle g(t),u\rangle\,dt\ \le\ \int_a^b\|g(t)\|\cdot\|u\|\,dt$$

$$=K\int_a^b\|g(t)\|\,dt$$

Œ $K\ne 0\Rightarrow K=\left\|\int_a^b g(t)\,dt\right\|\le\int_a^b\|g(t)\|\,dt$

Korollar: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar

Sei $x + tv \subset \mathbb{U} \quad \forall 0 \le t \le 1$

$$M = \sup_{\forall 0 \le t \le 1} \left\| \mathrm{D} f(x+tv) \right\|$$

$$\Rightarrow \left\| f(x+tv) - f(x) \right\| \le M \cdot \|v\|$$

Beweis:

$$\text{MWS} \Rightarrow \left\| f(x+\tau) - f(x) \right\| = \left\| \int_0^1 \left(\mathrm{D} f(x+tv) \cdot v \right) dt \right\| \overset{\text{Lemma}}{\le} \int_0^1 \left\| \mathrm{D} f(x+tv) \cdot v \right\| dt$$

$$\le \int_0^1 \left\| \mathrm{D} f(x+tv) \right\| \cdot \|v\| \, dt$$

$$\le M \cdot \|v\|$$

§ 5 Die Taylorformel

Abkürzungen: Seien

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \left(\mathbb{N} \cup \{0\} \right)^n$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

$$\alpha ! := \alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_n !$$

$$\mathrm{D}_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\mathrm{D}_i^{\alpha_i} := \underbrace{\mathrm{D}_i \cdots \mathrm{D}_i}_{\alpha_i - \text{mal}}$$

Für $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ $|\alpha|$-mal stetig differenzierbar, setzt man

$$\mathrm{D}^\alpha f := \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \cdot \mathrm{D}_2^{\alpha_2} \cdots \mathrm{D}_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\delta x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setzt man

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$$

Voraussetzung: $(\star)_k$: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar

Sei $x + tv \in \mathbb{U} \quad \forall 0 \le t \le 1$

Wir hatten:

$$g \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto x + tv = g(t) = \left(g_1(t), \ldots, g_n(t) \right) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f \circ g(t) = f(x+tv) \end{cases}$$

Lemma 1: Angenommen $(\star)_k$ gilt:

$$\Rightarrow \frac{d^k h}{dt^k} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \mathrm{D}_{i_k}\cdots\mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_k}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} \mathrm{D}_{i_k}\cdots\mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}\cdot v_{i_k}$$

Beweis: (Induktion nach k)

$k=1$:

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\big(f\circ g(t)\big) \overset{\text{KR}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} \mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot g_{i_1}'(t)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}$$

$k-1 \sim> k$:

Angenommen:

$$\frac{d^{k-1}h}{dt^{k-1}}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}=1}^{n} \mathrm{D}_{i_{k-1}}\cdots\mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_{k-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^k h}{dt^k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{k-1}=1}^{n} \mathrm{D}_{i_{k-1}}\cdots\mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_{k-1}}\right)$$

$$\overset{\text{KR}}{=} \sum_{i_k=1}^{n} \mathrm{D}_{i_k}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{k-1}=1}^{n} \mathrm{D}_{i_{k-1}}\cdots\mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_{k-1}}\right) v_{i_k}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \mathrm{D}_{i_k}\cdots\mathrm{D}_{i_1} f(x+tv)\cdot v_{i_1}\cdots v_{i_k}$$