

Voraussetzung: $(\star)_k$: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar

Sei $x + tv \in U \quad \forall 0 \leq t \leq 1$

$$g: \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto x + tv \end{cases}$$

$$h: \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f \circ g(t) \end{cases}$$

Lemma 2: Angenommen: $(\star)_k$ gilt $\Rightarrow h$ ist k -mal stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d^k h}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + tv) v^\alpha$$

Hierbei wird über alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ summiert.

Beweis: Kommt in (i_1, \dots, i_k) ($1 \leq i_v \leq n, v = 1, \dots, k$)

der Index 1 genau α_1 -mal vor,

der Index 2 genau α_2 -mal vor,

\vdots

der Index n genau α_n -mal vor,

so ist nach §4 Korollar zu Satz 3

$$D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + tv) v_{i_1} \cdots v_{i_k} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x + tv) v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}$$

$\exists!$ $\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$ k -Tupel i_1, \dots, i_k von Zahlen $1 \leq i_v \leq n$

bei denen die Zahl v genau α_v -mal vorkommt ($v = 1, \dots, n; \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^k h}{dt^k}(t) &\stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + tv) v_{i_1} \cdots v_{i_k} = \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x + tv) v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n} = \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + tv) v^\alpha \end{aligned}$$

Definition: Die Taylor-Formel:

Angenommen: $(\star)_k$ gilt:

$$\Rightarrow \exists \vartheta \in [0,1], \text{ so dass } f(x + v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \vartheta v)}{\alpha!} v^\alpha$$

Analysis II

Lange

Sommersemester 2004

Vorlesung 9

Mittwoch, 19. Mai 2004

Beweis: Lemma 2 $\Rightarrow h: \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x+tv) \end{cases}$ ist $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar und

nach Taylorformel (mit Lagrangeschem Restglied) für

Funktionen einer Variablen $t \exists \vartheta \in [0,1]$, so dass gilt:

$$h(1) = \sum_{m=0}^k \frac{h^{(m)}(0)}{m!} + \frac{h^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!} \quad (\text{für } t=1)$$

$$\text{Lemma 2} \Rightarrow \frac{h^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha$$

$$\frac{h^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x+t\vartheta v)}{\alpha!} v^\alpha$$

Korollar 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar

Sei weiter $\delta > 0$, so dass $B(x, \delta) \subset U$

$\Rightarrow \forall v \in B(x, \delta)$ gilt:

$$f(x+v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \varphi(v)$$

wo $\varphi: B(v, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ \|v\| \neq 0}} \frac{\varphi(v)}{\|v\|^k} = 0$

Beweis: Taylor-Formel (für $k-1$) \Rightarrow Zu $v \exists \vartheta \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x+v) &= \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\vartheta v)}{\alpha!} v^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \underbrace{\frac{D^\alpha f(x+\vartheta v) - D^\alpha f(x)}{\alpha!}}_{=: r_\alpha(v)} v^\alpha \end{aligned}$$

$$D^\alpha f \text{ stetig} \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} r_\alpha(v) = 0$$

$$\text{Setze } \varphi(v) := \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(v) v^\alpha \quad \Rightarrow \varphi(0) = 0$$

$$\text{und weiter } \frac{|v^\alpha|}{\|v\|^\alpha} = \frac{|v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}|}{\|v\|^{\alpha_1} \cdots \|v\|^{\alpha_n}} \leq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|^k} &= \lim_{v \rightarrow 0} \left| \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(v) \frac{v^\alpha}{\|v\|^\alpha} \right| \leq \lim_{v \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=k} |r_\alpha(v)| \frac{|v^\alpha|}{\|v\|^\alpha} \\ &\leq \lim_{v \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=k} |r_\alpha(v)| = 0 \end{aligned}$$

Spezialfälle:

1. $k = 1$

Sei $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-mal stetig differenzierbar, $x \in \mathbb{U}$, $B(x, \delta) \subset \mathbb{U}$

$$\begin{aligned} f(x+v) &= \sum_{|\alpha|=0} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \varphi(v) \\ &= f(x) + \sum_{j=1}^n \frac{D_j f(x)}{1!} v_j + \varphi(v) \\ &= f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \varphi(v) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi(0) = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|} = 0$$

2. $k = 2$

Sei $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-mal stetig differenzierbar, $x \in \mathbb{U}$, $B(x, \delta) \subset \mathbb{U}$

$$\begin{aligned} f(x+v) &= f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \varphi(v) \\ &= f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \sum_{i=1}^n \frac{D_i^2 f(x)}{2} v_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{D_i D_j f(x)}{1!} v_i v_j + \varphi(v) \\ &= f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x) v_i v_j + \varphi(v) \\ &= f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, D_i D_j f(x) \rangle + \varphi(x) \end{aligned}$$

Definition: $H f(x) := \text{Hess}(f(x)) := (D_i D_j f(x))_{i,j=1}^n$

heißt die **Hessesche (Matrix)** von f an der Stelle x

$$\Rightarrow f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, H f(x) \cdot v \rangle + \varphi(x)$$

ist die Taylorsche Formel für $k = 2$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|^2} = 0$

Definition: $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{U}$ **lokales Minimum (lokales Maximum)** von f

$:\Leftrightarrow \exists$ Umgebung $\mathbb{V} = \mathbb{V}(x_0)$, so dass

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{V}$$

$$(f(x) \leq f(x_0)) \quad \forall x \in \mathbb{V}$$

Ist $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$,

so heißt x_0 ein **isoliertes lokales Minimum (Maximum)**

Lokales Extremum := lokales Maximum oder Minimum

Satz 3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar
Hat f in x_0 ein lokales Extremum
 $\Rightarrow \text{grad } f(x) = 0 \quad (= (0, 0, \dots, 0))$

Beweis: Sei $h_i(t) = f(x_0 + te_i) \quad i = 1, \dots, n$
 $h_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar
Hat f lokales Extremum in x_0 , so hat h_i lokales Extremum in 0
Analysis I $\Rightarrow h_i'(0) = 0 \quad \forall i$
 $D_i f(x_0) = h_i'(0) = 0 \quad \forall i$ d.h. $\text{grad } f(x_0) = 0$

Definition: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch heißt

Positiv definit $\Leftrightarrow \langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$

Positiv semidefinit $\Leftrightarrow \langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$

\Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind > 0 bzw. ≥ 0

Negativ definit \Leftrightarrow wenn $-A$ positiv definit ist

Negativ semidefinit \Leftrightarrow wenn $-A$ positiv semidefinit ist

\Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind < 0 bzw. ≤ 0

A indefinit $\Leftrightarrow A$ nicht positiv oder negativ semidefinit ist

$\Leftrightarrow A$ hat positive und negative Eigenwerte

Satz 4: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal partiell differenzierbar
 $x_0 \in U$ mit $\text{grad } f(x) = 0$

- a) Ist $H(f)(x_0)$ positiv definit
 $\Rightarrow f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum
- b) Ist $H(f)(x_0)$ negativ definit
 $\Rightarrow f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Maximum
- c) Ist $H(f)(x_0)$ indefinit
 $\Rightarrow f$ hat in x_0 kein lokales Extremum

Beweis: a) \Rightarrow b)
Sei $H(f)(x_0)$ negativ definit
Betrachte: $g = -f$
 $\Rightarrow H(g)(x_0) = -H(f)(x_0)$ positiv definit
a) $\Rightarrow g$ hat ein lokales Minimum
 $\Rightarrow f$ hat ein lokales Maximum

c)

Sei $H(f)(x_0)$ indefinit

z.Z. In jeder Umgebung \mathbb{U} von x_0 $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{U}$ mit $f(y_1) < f(x_0) < f(y_2)$

Da $H(f)(x_0)$ indefinit, $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\langle v, H(f)(x_0) \rangle = a > 0$

$\exists w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\langle w, H(f)(x_0) \rangle = b < 0$

Nach Taylorformel ist für kleine Zahlen t

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv) &= f(x_0) + 0 + \frac{1}{2} \langle tv, H(f)(x_0) tv \rangle + \varphi(tv) \\ &= f\left(x_0 + \frac{t^2}{2} a + \varphi(tv)\right) \end{aligned}$$

Falls t hinreichend klein, ist $\varphi(tv) \leq \frac{a}{2} t^2$

$$\rightarrow \geq f(x_0) + \frac{t^2}{2} a - \frac{a}{4} t^2$$

$$= f(x_0) + \frac{a}{4} t^2 > f(x_0)$$

Analog: $f(x_0 + tw) < f(x_0)$