

1 Topologie

Metrik

$$\begin{aligned}d(x, y) = 0 & \quad \text{genau dann, wenn } x = y \\d(x, y) = d(y, x) & \quad \forall x, y \in X \\d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) & \quad \text{Dreiecksungleichung}\end{aligned}$$

Norm

$$\begin{aligned}\|x\| = 0 & \quad \text{genau dann, wenn } x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| & \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| & \quad \forall x, y \in V\end{aligned}$$

Satz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann wird durch

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$$

eine Metrik d auf V definiert

Definition

Sei X ein Metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* des Punktes $x \in X$, falls ein $\varepsilon > 0$ existieren so dass

$$B(x, \varepsilon) \subset U$$

Satz

Sei X ein Metrischer Raum. Dann gilt das "Hausdorfsche Trennungs axiom":

Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es Umgebung U von x und V von y , die Punktfremd sind, d.h. $U \cap V = \emptyset$

Definition

Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt *offen*, wenn sie Umgebung ihres Punktes ist, d.h. wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$B(x, \varepsilon) \subset U$$

Satz

Für die offenen Mengen eines metrischen Raumes X gilt:

- a) \emptyset und X sind offen
- b) Sind U und V offen, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ offen
- c) Sei $U_i, i \in I$ eine Familie offener Teilmengen von X . Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

Definition

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Satz

Sei X ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann gilt:

- a) Die Menge $Y \setminus \partial Y$ ist offen
- b) Die Menge $Y \cup \partial Y$ ist abgeschlossen
- c) Der Rand ∂Y ist abgeschlossen.

Definition

Sei X eine Menge. Ein System T von Teilmengen X heißt *Topologie* auf X falls gilt:

- a) $\emptyset, X \in T$
- b) Sind $U, V \in T$, so gilt auch $U \cap V \in T$
- c) Ist I eine beliebige Indexmenge und $U_i \in T \forall i \in I$ so gilt auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in T$$

Definition

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Eine Teilmenge $V \subset X$ heißt *Umgebung* von x , wenn es offene Mengen $U \subset X$ mit $x \in U$ gibt. Offenbar ist diese Definition im Fall metrischer Räume mit der früher gegebenen äquivalent, da die ε Umgebung $B(x, \varepsilon)$ in einem metrischen Raum offen sind.

Definition

Ein Topologischer Raum (X, T) heißt *Hausdorff-Raum*, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X, x \neq y$, Umgebung U von x und V von y existieren, mit $U \cap V = \emptyset$

2 Grenzwerte, Stetigkeit

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{R}}$ eine Folge von Punkten aus X . Die Folge (x_k) heißt *konvergent* gegen den Punkt $a \in X$, in Zeichen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$$

Satz

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{R}}$ eine Folge von Punkten im \mathbb{R}^n ,

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}), \quad k \in \mathbb{R}$$

Genau dann konvergiert die Folge (x_k) gegen den Punkt $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für $\nu = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$$

Satz

Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \in X$ ist genau dann *abgeschlossen*, wenn gilt:

Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{R}}$ eine Folge von Punkten $x_k \in A$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, so liegt x schon in A .

Definition

Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{R}}$ von Punkten aus X heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{R}$, so daß

$$\|x_k, x_m\| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N.$$

Satz

Im \mathbb{R}^n konvergiert jede Cauchy-Folge.

Durchmesser

Für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X setzt man:

$$\text{diam}(A) := \sup \|x, y\| : x, y \in A$$

Stetigkeit

Seien X und Y metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt *stetig* im Punkt $a \in X$, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Satz

Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten $f_\nu : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\nu = 1, 2, \dots, n$ stetig sind.

Corrolar

Sei X ein metrischer Raum und sei $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f * g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Gilt außerdem $g(x) \neq 0 \forall x \in X$, so ist auch

$$\frac{f}{g} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

Satz

$\varepsilon - \delta$ - **Kriterium der Stetigkeit:** Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f ist genau dann im Punkt $a \in X$ stetig, wenn gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass :

$$\|f(x), f(a)\| < \varepsilon \forall x \in X \text{ mit } \|x, a\| < \delta$$

Satz

Seien X, Y metrische Räume und $f_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : X \rightarrow Y$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.

Satz

Seien V und W normierte Vektoren und $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. A ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass:

$$\|A(x)\| \leq c\|x\| \forall x \in V$$

Satz

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

a) Die Abbildung f ist genau dann im Punkt $a \in X$ stetig, falls zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a existiert, so dass

$$f(U) \subset V.$$

b) Die Abbildung ist genau dann auf ganz X stetig, falls das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ offen in X ist.

3 Kompaktheit

Definition

Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X . Unter einer *offenen Umgebung* von A versteht man eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subset X$ mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Definition

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *kompakt*, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A endlich viele Indizes $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$ gibt, so dass

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

Satz

Sei X ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}$ eine Punktfolge in X , die gegen den Punkt $a \in X$ konvergiert. Dann ist die Menge

$$A := \{x_n : n \in \mathbb{R}\} \cup \{a\}$$

Satz

Seien $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}, a_\nu \leq b_\nu$, für $\nu = 1, 2, \dots, n$. Dann ist der abgeschlossene Quader

$$Q := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leq b_\nu\}$$

kompakt.

Satz

Jede kompakte Teilmenge A eines metrischen Raumes X ist beschränkt und abgeschlossen.

Satz

Sei X ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $A \subset K$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch A kompakt.

Heine-Borel

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.

4 Kurven im \mathbb{R}^n

Unter einer *Kurve* im \mathbb{R}^n versteht man eine stetige Abbildung

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Integral ist. Die Kurve f wird durch ein n -Tupel $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ stetiger Funktionen

$f_k : I \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$ gegeben.

Die Kurve heißt *differenzierbar* (bzw. *stetig differenzierbar*), wenn alle Funktionen f_k differenzierbar bzw. stetig differenzierbar sind.

Definition

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Die Kurve heißt *regulär*, falls $f'(t) \neq 0 \forall t \in I$. Ein Parameter $t \in I$ mit $f'(t) = 0$ heißt *singulär*.

Satz

Jede stetig differenzierbare Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar, und für ihre Länge L gilt:

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

5 Partielle Ableitung

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion. f heißt im Punkt $x \in U$ *partiell differenzierbar* bzgl. der i -ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$D_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

existiert. Dabei ist $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i -te Einheitsvektor.

Definition

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar*, falls $D_i f(x) \forall x \in U$ und $i=1,2,\dots,n$ existieren. f heißt *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Schreibweise: Statt $D_i f$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Entsprechend auch:

$$D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Satz

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = \nabla$$

der *Gradient* von f im Punkt $x \in U$

Definition

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

ein partiell differenzierbares Vektorfeld (d.h. alle Komponenten $v_i : U \in \mathbb{R}^n$ seien partiell differenzierbar). Dann heißt die Funktion

$$\text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \langle \nabla, v \rangle$$

Satz

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar*. Dann gilt $\forall a \in U$ und alle $i, j=1,2,\dots,n$:

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a)$$

Corollar

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} \dots D_{i_{\pi(2)}} D_{i_{\pi(1)}} f$$

Bemerkung

$$\operatorname{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \nabla \times v$$

Laplace-Operator

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetige partiell differenzierbare Funktion. Man setzt

$$\Delta := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Man nennt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \text{ den } \textit{Laplace - Operator}$$

6 Totale Differenzierbarkeit

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt im Punkt $x \in U$ *total differenzierbar* (oder *differenzierbar* schlechthin), wenn es eine lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt, so dass in einer Umgebung von x gilt :

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi),$$

wobei φ eine in einer Umgebung von Null definierte Funktion mit Werten in \mathbb{R}^m ist mit:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkt $x \in U$ differenzierbar sei und zwar gelte:

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + o(\xi)$$

mit der Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times m, \mathbb{R})$. Dann gilt:

- a) f ist im Punkt x stetig
- b) Alle Komponenten $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, von f sind in x partiell differenzierbar mit :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$$

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine in U partiell differenzierbare Funktion. Alle partiellen Ableitungen $D_i f$ seien im Punkt $x \in U$ stetig. Dann ist f in x total differenzierbar.

Corollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann ist f stetig.

Kettenregel

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen mit $g(U) \subseteq V$. Die Abbildung g sei im Punkt $x \in U$ differenzierbar und die Abbildung f im Punkt $y := g(x)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

im Punkt x differenzierbar und für ihr Differential gilt:

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $x \in U$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Unter *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v versteht man (im Fall der Existenz) den Differentialquotienten:

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x + vt)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + vt) - f(x)}{t}$$

Für $v = e_i$ ist $D_v f$ also gleich der i -ten partiellen Ableitung $D_i f$.

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$

$$D_v f(x) = \langle v, \text{grad } f(x) \rangle$$

Mittelwertsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, ein Vektor derart, dass die ganze Strecke $x + t\xi$, $0 \leq t \leq 1$ in U liegt. Dann gilt:

$$f(x + \xi) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi$$

Corollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, ein Vektor derart, dass die ganze Strecke $x + t\xi$, $0 \leq t \leq 1$ in U liegt. Es sei:

$$M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t\xi)\|$$

Dann gilt:

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \|\xi\|$$

Hilfssatz

Sei $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige vektorwertige Funktion auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt$$

7 Taylor-Formel, Lokale Extrema

Vorbemerkung

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_n$$
$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke $x + t\xi, 0 \leq t \leq 1$, ganz in U liegt. Dann ist die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(t) := f(x + t\xi)$$

k -mal stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + t\xi) \xi^\alpha$$

Taylor'sche Formel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass $x + t\xi \forall t \in [0, 1]$. Weiter sei:

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

Corollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\delta > 0$, so dass die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius δ ganz in U liegt. Weiter sei

$f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(\|\xi\|^k)$$

Dabei steht $o(\|\xi\|^k)$ als Abkürzung für eine Funktion φ mit $\varphi(0) = 0$ und

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} = 0$$

Definition

Sei $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Unter der *Hesse Matrix* von f im Punkt $c \in X$ versteht man die $n \times n$

$$(\text{hess } f)(x) := (D_i D_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Die Hessesche Matrix ist symmetrisch, da $D_i D_j f = D_j D_i f$

Corollar

Sei $f : U \subset \mathbb{R}$ offen und $x \in U$, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$f(x + \xi) = c + \langle a, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A \rangle + o(\|\xi\|^2),$$

wobei

$$c := f(x), \quad a := (\text{grad } f)(x), \quad A := (\text{Hess } f)(x)$$

Satz

Sei $f : U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, so gilt:

$$\text{grad } f(x) = 0$$

Definition

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix

a) Die Matrix A heißt *positiv definit*, falls:

$$\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

b) Die Matrix A heißt *positiv semidefinit*, falls:

$$\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

c) Die Matrix A heißt *negativ (negativ semidefinit)*, falls die Matrix $-A$ *positiv (positiv semidefinit)* ist

d) Die Matrix A heißt *indefinit*, falls es Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass:

$$\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle \eta, A\eta \rangle < 0$$

Satz

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix. A ist genau dann positiv definit, wenn für $k = 1, 2, \dots, n$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x \in U$ ein Punkt mit:

$$\text{grad } f(x) = 0$$

- a) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ positiv definit, so hat f in x ein isoliertes Minimum.
- b) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ negativ definit, so hat f in x ein isoliertes Maximum.
- c) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ indefinit, so hat f in x kein lokales Extremum.

8 Implizite Funktionen

Satz

Seien $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$

$$U_1 := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - a\| < r_1\} \quad U_2 := \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - b\| < r_2\}$$

und

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m(x, y) \rightarrow F(x, y)$$

eine Abbildung mit $F(a, b) = 0$, die im Punkt (a, b) total differenzierbar sei. Die $m \times m$ -Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ sei invertierbar. Weiter sei:

$$g : U_1 \rightarrow U_2, \quad x \rightarrow g(x)$$

eine stetige Abbildung mit:

$$g(a) = b, \quad g(U_1) \subset U_2$$

und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U_1$$

Dann ist g im Punkt a differenzierbar und für ihre Jacobi-Matrix gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $(a, b) \in U_1 \times U_2$ ein Punkt, so dass $F(a, b) = 0$ und die $m \times m$ -Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a und $V_2 \subset U_2$ von b und eine stetige Abbildung

$$g : V_1 \rightarrow V_2$$

mit

$$F(x(g(x))) = 0 \quad \forall x \in V_1$$

Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ ein Punkt mit $F(x, y) = 0$, so folgt $y = g(x)$

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $a \in U$ und $b := f(a)$. Die Jacobi-Matrix $Df(a)$ sei invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von a und eine offene Umgebung V' von b , so dass f die Menge V bijektiv auf V' abbildet und die Umkehrabbildung

$$g := f^{-1} : V' \rightarrow V$$

stetig differenzierbar ist. Es gilt

$$Dg(b) = (Df(a))^{-1}$$

9 Integrale, die von einem Parameter abhängen

Hilfssatz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $U \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge. Die Funktion

$$f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

sei stetig. Weiter sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Punktfolge in U mit

$$c := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in U$$

Dann konvergieren die Funktionen

$$F_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \\ F_k(x) := f(x, y_k)$$

für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(x) := f(x, c)$$

Satz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge und:

$$f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetige Funktion. Für $y \in U$ sei

$$\varphi(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

. Dann ist durch die dadurch definierte Funktion

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig.

Hilfssatz

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und

$$f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

eine stetige Funktion, die nach der zweiten Variablen, stetig partiell differenzierbar sei. Weiter sei $c \in J$ ein Punkt und $y_k \in J, k \in \mathbb{N}$, eine Punktfolge mit:

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \text{ und } y_k \neq c \quad \forall k.$$

Wir definieren Funktionen $F_k, F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch:

$$F_k(x) := \frac{f(x, y_k) - f(x, c)}{y_k - c}, \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$F(x) := \frac{\delta f}{\delta y}(x, c).$$

Satz

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und

$$f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nach der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbar sei. Für $y \in J$ sei

$$\varphi(y) := \int_I f(x, y) dx.$$

Dann ist die Funktion $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

MaW: Man kann "unter dem Integral differenzieren".

Satz

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $[c, d] \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Hilfssatz

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, und

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(a) = g(b) = 0$$

gelte

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0.$$

Dann ist $f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$

10 Existenz und Eindeigkeitsatz

Definition

Sei G eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 und

$$F : G \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung. Unter einer Lösung von (1) versteht man eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion:

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) Der Graph von φ ist in G enthalten, d.h.:

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subset G$$

b) Es gilt:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$$

Definition

Sei G eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man:

$$(2) \quad y' = f(x, y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung. Unter einer Lösung von (2) versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) Der Graph von φ ist in G enthalten.

b)

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$$

Definition

Sei G eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man:

$$(3) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine Differentialgleichung n -ter Ordnung. Unter einer Lösung von (3) versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte n -mal differenzierbare Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Menge

$$\{(x, y_0, \dots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n : y_\nu = y^{(\nu)}(x) \quad 0 \leq \nu \leq n-1\}$$

Ist in G enthalten.

b) $\forall x \in I$ gilt:

$$\varphi^{(n)} = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

Eindeutigkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien

$$\varphi, \Psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Gilt dann:

$$\varphi(x_0) = \Psi(x_0) \quad \text{für ein } x_0 \in I,$$

so folgt

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I$$

Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(a, c) \in G$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung

$$\varphi : [a - \epsilon, a + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit der „Anfangsbedingung“ $\varphi(a) = c$

Corrolar

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien:

$$\varphi, \Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$(*) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Für einen Punkt $a \in I$ gelte :

$$\varphi(a) = \Psi(a), \quad \varphi'(a) = \Psi', \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = \Psi^{(n-1)}(a).$$

Dann gilt $\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I$.

Ist umgekehrt ein Punkt $(a, c_0, \dots, c_{n-1}) \in G$ vorgegeben, so gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung:

$$\varphi : [a - \epsilon, a + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung(*), die der Anfangsbedingung

$$\varphi(a) = c_0, \quad \varphi'(a) = c_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = c_{n-1}$$

11 Elementare Lösungsmethoden

Definition

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad g : J \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen. Es werde vorausgesetzt, dass $g(y) \neq 0 \forall y \in J$
Die Differentialgleichung

$$(1) \quad y' = f(x)g(y) \text{ in } I \times J$$

heißt Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Satz

Bezeichnungen wie oben. Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$ ein Punkt. Wir definieren Funktionen $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}.$$

Es sei $I' \in I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subset G(J)$. Dann existiert genau eine Lösung:

$$\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung (1) mit

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Diese Lösung genügt der Beziehung:

$$(2) \quad G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in I'$$

Lineare Differentialgleichungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = a(x)y + b(x)$$

eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Falls $b(x) \equiv 0$ sogar eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Satz

Bezeichnungen wie oben. Sei $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung mit $\varphi(x_0) = c$, nämlich

$$\varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right).$$

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu beliebigem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit der Anfangsbedingung $\Psi(x_0) = c$ nämlich,

$$\Psi(x) = \varphi(x) \left(c + \int_{x_0}^x x \varphi^{-1} b(t) dt \right)$$

wobei

$$\varphi(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right).$$

Homogene Differentialgleichungen

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : \frac{y}{x} \in J\}$$

Dann heißt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

homogene Differentialgleichungen.

Satz

Bezeichnungen wie oben. Weiter sei $I \subset \mathbb{R}^*$ ein Intervall und $(x_0, y_0) \in G$ ein Punkt mit $x_0 \in I$. Dann gilt: Eine Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

ist genau dann eine Lösung der homogenen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$, wenn die Funktion

$$\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi(x) := \frac{\varphi(x)}{x}$$

Lösung der Differentialgleichung:

$$\Psi' = \frac{1}{x} (f(\Psi) - \Psi)$$

mit der Anfangsbedingung $\Psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$

12 Lineare Differentialgleichungen

Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine stetige Abbildung, d.h. alle Funktionen $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Dann heißt

$$(1) \quad y' = A(x)y$$

ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem. Weiter sei:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eine stetige Funktion. Dann heißt

$$(2) \quad y' = A(x)y + b(x)$$

ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem. Das DGL (1) heißt das dem System (2) zugeordnete homogene lineare Differentialgleichungssystem.

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien

$$A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K}) \quad \text{und} \quad B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

stetige Abbildungen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung:

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

der linearen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$$

eine stetige Abbildung. Wir bezeichnen mit L_H die Menge der Lösungen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

Dann ist L_H ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} . Für ein k -Tupel von Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L_H$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

- (i) $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sind linear unabhängig über \mathbb{K}
- (ii) Es existiert ein $x_0 \in I$, so dass die Vektoren $\varphi_1(x_0) \dots \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über \mathbb{K} sind.
- (iii) Für jedes $x_0 \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über \mathbb{K} .

Satz

Unter einem Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ versteht man die Basis $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ des Vektorraums seiner Lösungen. Schreibt man die Lösungen φ_i als Spaltenvektor:

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

so ist $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine $n \times n$ -Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für die Matrix $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ gilt:

$$\det \Phi(x_0) \neq 0$$

für wenigstens ein $x_0 \in I$. Es gilt dann $\det \Phi(x) \neq 0 \forall x \in I$

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien

$$A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K}), \quad b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

stetige Abbildungen. Wir bezeichnen mit L_H den Vektorraum aller Lösungen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der homogenen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y$$

und mit L_I die Menge aller Lösungen $\Psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

Dann gilt für ein beliebiges $\Psi_0 \in L_I$

$$L_I = \Psi_0 + L_H$$

MaW: Man erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Variation der Konstanten

Bezeichnungen wie oben. Sei $\Psi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$ ein Lösungs-Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$y' = A(x)y$$

Dann erhält man eine Lösung $\Psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des inhomogenen Systems

$$y' = A(x)y + b(x)$$

durch den Ansatz:

$$\Psi(x) \Phi(x) u(x)$$

Dabei ist $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $\Phi(x)u'(x) = b(x)$, d.h.

$$u(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt + c$$

Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$, $0 \leq k \leq n-1$ stetige Funktionen und ist $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine weitere stetige Funktion, Dann heißt:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' = b(x)$$

eine inhomogene lineare Gleichung (wenn $b \equiv 0$ dann ist es eine homogene lineare Gleichung).

Satz

Bezeichnung wie oben.

a) Sei L_H die Menge aller Lösungen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ der homogenen Differentialgleichung. Dann ist L_H ein n -dimensionaler Vektorraum.

b) Sei L_I die Menge aller Lösungen $\Psi : I \rightarrow \mathbb{K}$ der inhomogenen Differentialgleichung. Dann gilt für ein beliebiges $\Psi_0 \in L_I$

$$L_I = \Psi_0 + L_H$$

c) Ein n -tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H)$ von Lösungen der homogenen Gleichung ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein und damit für alle $x \in I$ die „Wronski-Determinante“

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Definition

Eine Basis $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ des Lösungsraums L_H der homogenen Differentialgleichung heißt Lösungs-fundamentalsystem.

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ zwei stetige Funktionen. Weiter sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Im Intervall $J \subset I$ gelte $\varphi(x) \neq 0$. dann erhält man über J eine zweite von φ linear unabhängige Lösung $\Psi : J \rightarrow \mathbb{K}$ durch den Ansatz:

$$\Psi(x) = \varphi(x)u(x)$$

wobei u eine nicht konstante Lösung der Differentialgleichung

$$u'' + \left(2 \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x) \right) u' = 0$$

ist.

13 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Hilfssatz

Für jedes Polynom $P(T) \in \mathbb{C}[T]$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

Satz

Sei $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$. Das Polynom P habe n paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_k := e^{\lambda_k x} \quad k = 1, \dots, n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

Hilfssatz

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jede auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ k -mal differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

$$(D - \lambda)^k(f(x)e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

Hilfssatz

Sei $P(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) \neq 0$. Ist dann $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad k , so gilt:

$$P(D)(g(x)e^{\lambda x}) = h(x)e^{\lambda x},$$

wobei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wieder eine Polynomfunktion vom Grad k -ist.

Satz

Das Polynom

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$$

habe paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ mit der Vielfachheit k_j , $1 \leq j \leq r$. Dann besitzt die Differentialgleichung:

$$P(D)y = 0$$

ein Lösungs-Fundamentalsystem aus folgenden Funktionen:

$$\varphi_{jm}(x) := x^m e^{\lambda_j x}, \quad 1 \leq j \leq r \quad 0 \leq m \leq k_j - 1$$

Satz

Sei $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ und $\mu \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit $P(\mu) \neq 0$: Dann besitzt die inhomogene Differentialgleichung

$$P(D)y = e^{\mu x}$$

die spezielle Lösung

$$\Psi(x) := \frac{1}{P(\mu)} e^{\mu x}$$

14 Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Corollar

Besitzt die Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Basis $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ von Eigenvektoren zu dem Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, so bilden die Funktionen

$$\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varphi_k(x) = a_k e^{\lambda_k x} \quad (k = 1, \dots, n),$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung:

$$y' = Ay$$

Hilfssatz

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und $S \in GL(n, \mathbb{C})$. Eine Funktion von $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung:

$$y' = Ay,$$

wenn die Funktion $\Psi := S^{-1}\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ Lösung der Differentialgleichung

$$z' = (S^{-1}AS)z$$

ist.

MaW: Die Differentialgleichung $y' = Ay$ geht durch die Substitution $z := S^{-1}y$ in $z' = (S^{-1}AS)z$ über.