

Definitionen: A) Eine **Topologie** auf \mathbb{X} ist ein System \mathbb{T} von Teilmengen von \mathbb{X} , für die gilt:

- 1) $\mathbb{X} \in \mathbb{T}, \emptyset \in \mathbb{T}$
- 2) $U, V \in \mathbb{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathbb{T}$
- 3) $U_i \in \mathbb{T} \quad \forall i$ aus beliebigen Indexmengen $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathbb{T}$

Das Paar (\mathbb{X}, \mathbb{T}) heißt **topologischer Raum**

$U \subset \mathbb{X}$ heißt **offen** $\Leftrightarrow U \in \mathbb{T}$

$V \subset \mathbb{X}$ heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow \mathbb{X} \setminus V$ offen

B) Metrische Räume

Sei \mathbb{X} eine Menge.

Eine **Metrik** auf \mathbb{X} ist eine Abbildung $d: \begin{cases} \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y) \end{cases}$

s.d. gilt $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ und $(d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
- (ii) $d(y, x) = d(x, y)$
- (iii) **Dreiecksungleichung:** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Das Paar (\mathbb{X}, d) heißt **metrischer Raum**

Man schreibt kurz \mathbb{X} statt (\mathbb{X}, d)

C) Sei \mathbb{V} ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine **Norm** auf \mathbb{V} ist eine Abbildung

$\| \cdot \|: \begin{cases} \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \|v\| \end{cases}$ für die gilt:

- (i) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$

Ein **normierter Vektorraum** ist ein Paar $(\mathbb{V}, \| \cdot \|)$ wo $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ -Vektorraum

und $\| \cdot \|: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Norm.

Definition: $\mathbb{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{X} \mid d(a, x) < r\}$ heißt **offene Kugel** um a mit Radius r .

$U \subset \mathbb{X}$ heißt **Umgebung** von $x \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.d. $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \subset U$.

Definition: Ein topologischer Raum (\mathbb{X}, \mathbb{T}) heißt **hausdorffsch**, falls es zu je 2 Punkten

$x \neq y \in \mathbb{X}$ Umgebungen $U = U(x)$ und $V = V(y)$ gibt, mit $U \cap V = \emptyset$.

Analysis II

Lange

Definitionen

Definition: Sei (\mathbb{X}, d) metrischer Raum, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ Teilmenge $x \in \mathbb{X}$ heißt **Randpunkt** von \mathbb{Y}
: \Leftrightarrow in jeder Umgebung von x liegt sowohl ein Punkt von \mathbb{Y} als auch ein Punkt von $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

Definition: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{X} \stackrel{\exists}{\Leftrightarrow}$ zu jeder Umgebung U von x $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass
$$x_n \in U \quad \forall n \geq N$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Definition: Eine Folge von Punkten $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eines metrischen Raumes \mathbb{X} heißt **Cauchy-Folge**, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, s.d. $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq N$.

Definition: Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn in ihm jede C-Folge konvergiert.

Definition: Für $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ setze:
$$\text{diam}(\mathbb{A}) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in \mathbb{A}\}$$

=Durchmesser von \mathbb{A}
 $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ beschränkt: $\Leftrightarrow \text{diam}(\mathbb{A}) < \infty$

Definition: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ metrischer Räume heißt **stetig** in $x_0 \in \mathbb{X}$,

falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\exists}{=} f(x_0)$

d.h. Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\exists}{=} x_0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{\exists}{=} f(x_0)$$

f heißt stetig auf $\mathbb{X} \Leftrightarrow f$ ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{X}$ stetig.

$\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ Abbildung metrischer Räume. Äquivalent sind für $x_0 \in \mathbb{X}$:

(i) f ist stetig in x_0

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass gilt:

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{X} \text{ mit } d(x, x_0) < \delta$$

Definition: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f
: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $d(f_n(x) - f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbb{X}$

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ topologischer Räume heißt stetig, wenn (ii - Das Urbild $f^{-1}(\mathbb{V})$ jeder offenen Menge \mathbb{V} in \mathbb{Y} ist offen in \mathbb{X}) gilt.

Definitionen

Definition: Sei \mathbb{X} metrischer Raum, $A \subset \mathbb{X}$

Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie $(U_i)_{i \in \mathbb{I}}$ von offenen Teilmengen U_i von \mathbb{X} mit $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i$

Definition: A heißt **kompakt in \mathbb{X}** \Leftrightarrow zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{I}}$ von A gibt es endlich viele $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{I}$, so dass

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

Man sagt: Jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckungen (**Heine-Borel-Eigenschaft**)

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ metrischer Räume heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass

$$d(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \forall x, x' \text{ mit } d(x, x') < \delta$$

Definition: Sei $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ Intervall (endlich oder unendlich)

Eine Kurve in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Klar ist: f stetig $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Die Kurve $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar**

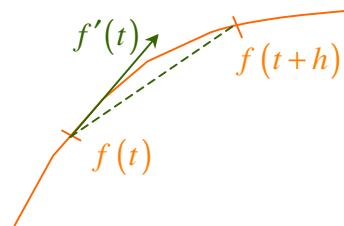
$\Leftrightarrow f_1, \dots, f_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sind **differenzierbare Funktionen**

Definition: Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Kurve. Für $t \in \mathbb{I}$ heißt

$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ der **Tangentenvektor** von f in t

Ist $f'(t) \neq 0$, so heißt $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ der **Tangenten-Einheitsvektor** in t

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$



Definition: Gilt für eine Kurve $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f(t_1) = f(t_2)$ mit $t_1 < t_2$, so heißt

$f(t_1)$ **Doppelpunkt** der Kurve

Definition: Sei $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Kurve

f heißt **regulär**, falls $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{I}$

f heißt **singulär** in t , falls $f'(t) = 0$

Analysis II

Lange

Definitionen

Definition: Eine Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar** mit der Länge L
: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ der Feinheit $\leq \delta$
gilt: $|P_f(t_0, \dots, t_k) - L| < \varepsilon$
Mit anderen Worten: Länge von $f =$ Grenzwert der Länge von Polynomzügen,
falls die Feinheit gegen 0 geht.

Definition: Eine Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar** mit Länge L
: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass gilt:
Für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit $\leq \delta$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - L \right| < \varepsilon$$

Definition: Man sagt, g geht aus f durch die Parametertransformation φ hervor.
Sind φ und φ^{-1} stetig differenzierbar, so spricht man von einer
 C^1 -Parametertransformation.

Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation, so ist entweder

a) φ ist streng monoton wachsend
dann heißt φ **orientierungstreu**

oder

b) φ ist streng monoton fallend
dann heißt φ **orientierungsumkehrend**

Definition: f heißt im Punkt $x \in \mathbb{U}$ **partiell differenzierbar nach x_i**

$$:\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h} \quad \exists$$

Definition: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen
 $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar**,

wenn $\forall x \in \mathbb{U}$ und $\forall i = 1, \dots, n$ die i -te partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ existiert.

Dann ist $\frac{\partial}{\partial x_i} f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Funktion $\forall i = 1, \dots, n$

Definition: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar

$$\text{grad } f(x) := \nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

heißt **Gradient** von f im Punkt x .

Definition: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** auf \mathbb{U} ist eine Abbildung: $v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Analysis II

Lange

Definitionen

Insbesondere $\text{grad } f : \begin{cases} \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \text{grad } f(x) \end{cases}$ heißt **Gradientenvektorfeld** von f

Definition: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = (v_1, \dots, v_n) : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares VF auf \mathbb{U} .

(d.h. alle Komponentenfunktionen v_i sind stetig partiell differenzierbar)

Die Funktion $\text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ heißt **Divergenz** des VF v

Definition: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \geq 1$. $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (f) \right) \right) \right) \quad \forall 1 \leq i_v \leq n \quad v = 1, \dots, k$$

partiell differenzierbar sind.

Also: $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal partiell differenzierbar

$\Leftrightarrow f$ und $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sind partiell differenzierbar

Definition: $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig partiell differenzierbar,

wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Definition: Das VF $\text{rot } v : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert durch:

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Definition Sei $C^k(\mathbb{U}) := \{k\text{-mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf } \mathbb{U}\}$

$= \mathbb{R}$ -Vektorraum ($\dim = \infty$)

$\Delta : C^2(\mathbb{U}) \rightarrow C^0(\mathbb{U})$ heißt **Laplace-Operator**

Die DGL $\Delta f = 0$ heißt **Potentialgleichung**.

Jede Funktion f mit $\Delta f = 0$ heißt **harmonische Funktion**.

Definition: f in $x \in \mathbb{U}$ (total) differenzierbar

$:\Leftrightarrow \exists$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine in einer

Umgebung \mathbb{V} von $0 (\subset \mathbb{R}^n)$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass

$$f(x + \xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi) \quad (\forall \xi \in \mathbb{V})$$

$$\text{mit } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

Definition: $Df := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ heißt das **Differential** der Abbildung f
oder die **Jacobi-Matrix** von f
oder die **Funktionalmatrix** von f

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \in U \text{ und } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1$$

$$D_v f(x) := \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \text{ heißt } \mathbf{Richtungsableitung} \text{ von } f \text{ in Richtung}$$

MWS: (für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

Sei $x + tv \in U \quad \forall 0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow \exists \tau \in (0, 1) \text{ mit } f(x + v) - f(x) = Df(x + \tau v) \cdot v$$

Definition: $\int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b f_{ij}(t) dt \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$

Mittelwertsatz: (Für Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Abbildung

\Rightarrow Sei $x + tv \in U \quad \forall 0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow f(x + v) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + tv) dt \right) \cdot v \text{ (Matrizenmultiplikation)}$$

(\star)_k : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar

Sei $x + tv \in U \quad \forall 0 \leq t \leq 1$

$$g : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto x + tv \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f \circ g(t) \end{cases}$$

Definition: Die **Taylor-Formel**:

Angenommen: (\star)_{k+1} gilt:

Definitionen

$$\Rightarrow \exists \vartheta \in [0,1], \text{ so dass } f(x+v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x+\vartheta v)}{\alpha!} v^\alpha$$

Definition: $Hf(x) := \text{Hess}(f(x)) := (D_i D_j f(x))_{i,j=1}^n$

heißt die **Hessesche (Matrix)** von f an der Stelle x

$$\Rightarrow f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, Hf(x) \cdot v \rangle + \varphi(v)$$

ist die Taylorsche Formel für $k = 2$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|^2} = 0$

Definition: $U \subset \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in U$ **lokales Minimum (lokales Maximum)** von f

$\Leftrightarrow \exists$ Umgebung $V = V(x_0)$, so dass

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

$$(f(x) \leq f(x_0)) \quad \forall x \in V$$

Ist $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$,

so heißt x_0 ein **isoliertes lokales Minimum (Maximum)**

Lokales Extremum := lokales Maximum oder Minimum

Definition: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch heißt

$$\text{Positiv definit} \quad \Leftrightarrow \langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Positiv semidefinit} \quad \Leftrightarrow \langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

\Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind > 0 bzw. ≥ 0

$$\text{Negativ definit} \quad \Leftrightarrow \text{wenn } -A \text{ positiv definit ist}$$

$$\text{Negativ semidefinit} \quad \Leftrightarrow \text{wenn } -A \text{ positiv semidefinit ist}$$

\Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind < 0 bzw. ≤ 0

$$A \text{ indefinit} \quad \Leftrightarrow A \text{ nicht positiv oder negativ semidefinit ist}$$

$\Leftrightarrow A$ hat positive und negative Eigenwerte

Man sagt: Falls $F(x, g(x)) = 0$, so sagt man die Funktion $g(x)$ wird durch die Gleichung $F(x, g(x)) = 0$ **implizit** gegeben. $g(x)$ heißt **implizite Funktion**.

Definition: Die Kurven $N_f(c) = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\}$ heißen

Höhenlinien (Niveaulinien) von f .

Angenommen: f besitzt in a ein lokales Maximum (bzw. Minimum)

mit der Nebenbedingung $h = 0$

(d.h. \exists Umgebung $V \subset U$ von a , so dass $f(a) \geq f(x)$)

Definitionen

(bzw. $f(a) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{V} \cap M$)

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\text{grad } f(a) = \lambda \text{ grad } h(a)$

λ heißt **Lagrange-Multiplikator**

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nk}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig

Dann heißt $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

ein **System aus k Differentialgleichungen n -ter Ordnung**.

Eine Lösung hiervon ist eine auf einem Intervall definierte Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ n -mal stetig differenzierbar, mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Menge $\{y_v = \varphi^{(v)}(x) \mid (x, y_0, \dots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^{nk}, 0 \leq v \leq n-1\}$ ist in G enthalten.

ii) Es gilt $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I$.

Definition: Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Funktion.

f genügt einer **Lipschik-Bedingung** mit Konstante L ,

falls für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in G$

$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|$ gilt.

f genügt **lokal** einer **Lipschik-Bedingung**, falls es zu allen $(a, b) \in G$ eine

Umgebung \mathbb{U} von (a, b) gibt, so dass f in $G \cap \mathbb{U}$ einer Lipschik-Bedingung mit

einer Konstanten $L_{\mathbb{U}}$ genügt.

Definition: Die DGL $y' = f(x)g(y)(I)$ heißt DGL mit **getrennten Variablen**.

Definition: $y' = a(x)y + b(x)$ heißt lineare DGL 1. Ordnung. (I) heißt **homogen**,

falls $b \equiv 0$, sonst inhomogen.

Definition: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ heißt **homogene Differentialgleichung**.

Definition: $I \subseteq \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ stetig, d.h. alle $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann heißt $y' = A(x) \cdot y$ **homogenes lineares Differentialgleichungssystem**.

Sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig

Dann heißt $y' = A(x) \cdot y + b(x)$ **inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem**.

Definition: Ein **Fundamentalsystem von Lösungen** der DGL $y' = A(x) \cdot y$ ist eine Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ des Vektorraums der Lösungen L_H .

Lösungen $\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}$ in Matrix $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$

Definition: $\det \Phi$ heißt die **Wronski-Determinante** des Fundamentalsystems Φ .
Jede Lösung $\varphi \in L_H$ lässt sich als Linearkombination der Basis schreiben:

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$$

$$\varphi = \Phi \cdot c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Man kann auch Φ als Lösung auffassen:

$$\Phi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_n), \quad A\Phi = (A\varphi_1, \dots, A\varphi_n)$$

$$\Rightarrow \Phi' = A\Phi$$

Definition: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$, $0 \leq k \leq n-1$ stetige Funktionen.

Dann heißt $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ (I) **homogene lineare DGL n -ter Ordnung**.

Ist außerdem $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, so heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x) \quad (2)$$

inhomogene lineare DGL n -ter Ordnung.

Definition: Sei $P \in \mathbb{C}[T]$ und $D = \frac{d}{dx}$

$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0$ heißt **Differentialoperator n -ter Ordnung**, falls $a_n \neq 0$.

Definition: Eine Abbildung von Funktionenräumen nennt man einen **Operator**.

Definitionen

Definition: $\omega_f(M) := \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x) = \text{Oszillation von } f \text{ auf } M$

(Definition: Für $\delta > 0$ ist $K_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$)

Definition: $\omega_f(x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(K_\delta(x_0) \cap [a, b])$ heißt **Oszillation von f in x_0**

Definition: $M \subset \mathbb{R}$ heißt **Nullmenge** oder **Menge vom Maß 0**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle I_ν gibt mit

$$1) \quad M \subseteq \bigcup_{\nu} I_\nu$$

$$2) \quad \sum_{\nu} |I_\nu| < \varepsilon$$

Hierbei ist $|I_\nu|$ die Länge des Intervalls I_ν , also $|I_\nu| = b - a$,

falls $I_\nu = (a, b)$, $I_\nu = [a, b]$, $I_\nu = (a, b]$, ...

Definition: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **fast überall stetig**,

falls $U(f) := \{x \in I \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$ ist Nullmenge.

Definition: Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$), $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$f_n \rightarrow f$ fast überall auf $[a, b]$

d.h. $\Leftrightarrow \exists$ Nullmenge $N \subset [a, b]$, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\exists}{=} f(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus N$$

$f_n \nearrow f$ fast überall auf $[a, b]$

$\Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ fast überall auf $[a, b]$ und $(f_n(x))$ ist monoton wachsend $\forall x \in [a, b]$

Analog: $f_n \searrow f$ fast überall auf $[a, b]$

$\Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ fast überall auf $[a, b]$ und $(f_n(x))$ ist monoton fallend $\forall x \in [a, b]$

Definition: φ heißt Treppenfunktion auf I

$\Leftrightarrow \exists$ ein endliches Teilintervall $[a, b] \subset I$, so dass $\varphi|_{[a, b]}$ Treppenfunktion

$$\text{und } \varphi|_{I \setminus [a, b]} \equiv 0$$

Definition: $f \in L(I)$, etwa $f = g - h$ mit $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$, $h = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ f.ü., $(\varphi_n), (\psi_n)$ monoton
Wachsend

$$\int_I f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \psi_n(x) dx = \text{Lebesgues Integral von } f \text{ über } I$$

Analysis II

Lange

Definitionen
