Analysis II

Sommersemester 2004

Sätze

Lemma 1: Sei $(\mathbb{V}, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum. Durch

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad \forall x,y \in \mathbb{V}$$

wird eine Metrik auf $\mathbb{V}$ definiert.

Mit anderen Worten: Jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum.

Satz 2: Sei $(\mathbb{X}, d)$ ein metrischer Raum $\mathbb{T} := \{\text{offene Mengen in } \mathbb{X}\}$

$(\mathbb{X}, \mathbb{T})$ ist topologischer Raum.

Satz 3: Jeder metrische Raum ($\mathbb{X}$,d) ist hausdorffsch.

Satz 4: Sei ($\mathbb{X}$,d) metrischer Raum und $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$.

(i) $\mathbb{Y} \setminus \delta\mathbb{Y}$ ist offen
(ii) $\mathbb{Y} \cup \delta\mathbb{Y}$ ist abgeschlossen
(iii) $\delta\mathbb{Y}$ ist abgeschlossen

Satz 5: Für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$, $x_k = \left(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}\right)$ sind äquivalent:

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \overset{\exists}{=} x = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_\nu} \overset{\exists}{=} \overline{x}_\nu \qquad \forall \nu = 1, \ldots, n$

Satz 6: Für eine Teilmenge $\mathbb{A}$ eines metrischen Raumes $\mathbb{X}$ sind äquivalent:

(i) $\mathbb{A}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{X}$

(ii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n \in \mathbb{A}$
mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x \in \mathbb{X} \qquad \Rightarrow x \in \mathbb{A}$

Proposition 7: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in x $\Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist C-Folge

Satz 8: $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

Satz 9: Seien $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, \quad g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ Abbildungen metrischer Räume und $x_0 \in \mathbb{X}$

Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow g \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ ist stetig in x_0.

Satz 10: Seien $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf metrischen Raum $\mathbb{X}$.

$\Rightarrow f + g : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \qquad f \bullet g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ stetig

Ist $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X} \Rightarrow \dfrac{f}{g} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ stetig

Satz 11: Angenommen: (1) $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f

$\Rightarrow f$ ist stetig

Satz 12: Sei $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ Abbildung metrischer Räume.

Für $x_0 \in \mathbb{X}$ sind äquivalent:

(i) f stetig in x_0

(ii) Zu jeder Umgebung $\mathbb{V}$ von $f(x_0)$ existiert eine Umgebung $\mathbb{U}$ von x_0, so dass $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{V}$

Satz 13: Äquivalent sind für $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$

(i) f ist stetig

(ii) Das Urbild $f^{-1}(\mathbb{V})$ jeder offenen Menge $\mathbb{V}$ in $\mathbb{Y}$ ist offen in $\mathbb{X}$

Korollar: Äquivalent sind

(i) $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ stetig

(ii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge von $\mathbb{Y}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{X}$.

Satz 14: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Punktfolge im metrischen Raum $\mathbb{X}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} x_0$

$\Rightarrow$ Die Menge $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ ist kompakt.

Satz 15: Seien $a_\nu \leq b_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow$ Der abgeschlossene Quader $Q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu\}$ ist kompakt

Satz 16: Jede kompakte Menge A eines metrischen Raumes $\mathbb{X}$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Satz 17: $\mathbb{X} =$ metrischer Raum, $K \subset \mathbb{X}$ kompakt

$A \subset K$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt

Satz von Heine-Borel: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(i) A kompakt

(ii) A abgeschlossen und beschränkt

Satz 18: Sei $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ stetige Abbildung metrischer Räume

$K \subset \mathbb{X}$ kompakt $\Rightarrow f(K) \subset \mathbb{Y}$ kompakt

Satz 19: Sei $\mathbb{X}$ kompakter metrischer Raum, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.

(d.h. $\exists p,q\in\mathbb{X}$ mit $\begin{cases} f(p)=\sup\{f(x)|x\in\mathbb{X}\} \\ f(q)=\inf\{f(x)|x\in\mathbb{X}\}\end{cases}$)

Satz von Bolzano-Weierstraß:
Sei A kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $\mathbb{X}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (beliebig) eine Folge von Punkten in A.

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt von A konvergiert.

Satz 20: Sei $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ stetige Abbildung metrischer Räume und $\mathbb{X}$ kompakt
$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig

Satz 1: Jede stetig differenzierbare Kurve $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und für ihre Länge L gilt: $L=\int_a^b \|f'(t)\|\,dt$

Lemma: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar
$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$, so dass

$$\left\|\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}-f'(t)\right\|<\varepsilon \qquad \forall t,\tau\in[a,b] \text{ mit } 0<|t-\tau|<\delta$$

Satz 2: Für eine C^1-Parametertransformation φ sind äquivalent:
(i) φ ist orientierungstreu (bzw. orientierungsumkehrend)
(ii) $\varphi'(t)>0$ (bzw. $\varphi'(t)<0$) $\forall t$

Satz 3: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ differenzierbare Kurve und $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ ein C^1-Parametertransformation.
Dann gilt für $g=f\circ\varphi$: $g'(t)=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$
Die Tangentenvektoren von g in t und von f in $\varphi(t)$ unterscheiden sich nur um den skalaren Faktor $\varphi'(t)$

Satz 4: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Kurve und $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ eine C^1-Parametertransformation, $g:=f\circ\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$

$$\int_a^b\|f'(t)\|\,dt=\int_\alpha^\beta\|g'(\tau)\|\,d\tau$$

Satz 1: Seien $f,g:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ partiell differenzierbar
$\Rightarrow f\cdot g$ partiell differenzierbar und es gilt:
$\operatorname{grad}(f\cdot g)=\operatorname{grad}(f)\cdot g+f\cdot\operatorname{grad}(g)$

Satz 2: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $v : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbares *VF*.

$$\Rightarrow \operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \cdot \operatorname{div}(v)$$

Satz 3: Sei $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \quad \forall 1 \leq i_1, i_2 \leq n$$

Korollar 1: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für jede Permutation σ der Zahlen $1, \ldots, k$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \ldots \partial x_{\sigma(i_k)}}$$

Korollar 2: $f : \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

Satz 1: Äquivalent sind für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$

1. f ist differenzierbar in x
2. f_i ist differenzierbar in $x \quad \forall i = 1, \ldots, m$

Satz 2: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ in $x \in \mathbb{U}$ differenzierbar

Also: $f(x + \xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi)$ mit $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$

und $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$

Dann gilt:

a) f stetig in x

b) Alle Komponenten $f_i : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ von f sind in x partiell differenzierbar mit $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$

Also: A ist gerade die Matrix der partiellen Ableitungen

Satz 3: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar

$$\Rightarrow f \text{ total differenzierbar}$$

Korollar: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar

$\Rightarrow f$ stetig

Kettenregel: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ offen

$g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^k$ mit $f(\mathbb{V}) \subset \mathbb{U}$

Anmerkung: g ist in $x \in \mathbb{U}$ differenzierbar
f ist in $y = g(x)$ differenzierbar

$\Rightarrow f \circ g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^k$ in $x \in \mathbb{U}$ differenzierbar und für ihr Differential gilt:

$$\mathrm{D}(f \circ g) = \mathrm{D}\big(f(g(x))\big) \cdot \mathrm{D}\, g(x)$$

Satz 4: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

$\Rightarrow$ Für $x \in \mathbb{U}$ und $v = \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt:

$$\mathrm{D}_v\, f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle$$

Lemma 5: Sei $g : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R}^m \\ t \mapsto g(t) \end{cases}$ stetig differenzierbar

$$\Rightarrow \left\| \int_a^b g(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\, dt$$

Korollar: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar

Sei $x + tv \in \mathbb{U} \quad \forall 0 \leq t \leq 1$

$M = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \|\mathrm{D}\, f(x + tv)\|$

$\Rightarrow \|f(x+tv) - f(x)\| \leq M \cdot \|v\|$

Lemma 1: Angenommen $(\ )_k$ gilt:

$$\Rightarrow \frac{d^k h}{dt^k} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \mathrm{D}_{i_k} \cdots \mathrm{D}_{i_1} f(x+tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \mathrm{D}_{i_k} \cdots \mathrm{D}_{i_1} f(x+tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

Lemma 2: Angenommen: $(\ )_k$ gilt $\Rightarrow$ h ist k-mal stetig differenzierbar und es gilt:

$$h^{(k)}(t) = \frac{d^k h}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha f(x+tv)\, v^\alpha$$

Hierbei wird über alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ summiert.

Korollar 1: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \mathbb{U}$, $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar

Sei weiter $\delta > 0$, so dass $B(x, \delta) \subset \mathbb{U}$

$\Rightarrow \forall v \in B(0, \delta)$ gilt:

$$f(x+v)=\sum_{|\alpha|\le k}\frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}v^\alpha+\varphi(v)$$

$$\text{wo } \varphi: B(0,\delta)\to\mathbb{R} \text{ mit } \varphi(0)=0 \text{ und } \lim_{\substack{v\to 0\\ \|v\|\ne 0}}\frac{\varphi(v)}{\|v\|^k}=0$$

Satz 3: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ partiell differenzierbar
Hat f in x_0 ein lokales Extremum
$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x)=0 \quad (=(0,0,\dots,0))$

Satz 4: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar
$x_0\in\mathbb{U}$ mit $\operatorname{grad} f(x_0)=0$

a) Ist $\mathrm{H}(f)(x_0)$ positiv definit
$\Rightarrow$ f hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum

b) Ist $\mathrm{H}(f)(x_0)$ negativ definit
$\Rightarrow$ f hat in x_0 ein isoliertes lokales Maximum

c) Ist $\mathrm{H}(f)(x_0)$ indefinit
$\Rightarrow$ f hat in x_0 kein lokales Extremum

Satz 4: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ 2mal stetig differenzierbar
$x_0\in\mathbb{U}$ mit $\operatorname{grad} f(x_0)=0$

a) Ist $H(f)(x_0)$ positiv definit
$\Rightarrow$ f hat in x_0 ein isoliertes, relatives Minimum

Satz 1: Angenommen:
1) F in (a,b) total differenzierbar
2) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbare Matrix
3) $g:\mathbb{U}_1\to\mathbb{R}^m$ stetig mit $g(a)=b$

$\Rightarrow$ g in a total differenzierbar und für die Funktionalmatrix gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a)=\bar{v}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a)=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,k}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,k}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i,j=1,\dots,m}$$

Satz 2: Seien $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F:\mathbb{U}_1\times\mathbb{U}_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar
Sei $(a,b)\in \mathbb{U}_1\times\mathbb{U}_2$ mit

a) $F(a,b)=0$

b) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbare Matrix

$\Rightarrow \exists$ offene Umgebungen $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{U}_1$ von a und $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{U}_2$ von b und stetige Abbildung $g:\mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ mit $F(x,g(x))=0 \quad \forall x\in \mathbb{V}_1$

Für jedes $x\in \mathbb{V}_1$ ist $g(x)$ die einzige in $\mathbb{V}_2$ liegende Lösung von $F(x,y)=0$

Man sagt: Die Abbildung g entsteht durch Auflösung der Gleichung $F(x,y)=0$ nach y.

Satz 3: Voraussetzungen wie in Satz 2
$\Rightarrow \exists$ Ungebung $\tilde{\mathbb{V}}_1 \subset \mathbb{V}_1$ von a, so dass
g auf $\tilde{\mathbb{V}}_1$ stetig differenzierbar ist

Satz 4: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ offen und $f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar
Sei $a\in\mathbb{U},\ b=f(a),\ y=f(x)$

Angenommen: $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ invertierbare Matrix

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung $\mathbb{V}\subset\mathbb{U}$ von a und offene Umgebung $\mathbb{V}'$ von b, so dass $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}'$ bijektiv und die Umkehrabbildung $g:=f^{-1}:\mathbb{V}'\to\mathbb{V}$ stetig differenzierbar

Es gilt: $\frac{\partial g}{\partial y}(b)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(b))\right)^{-1}$

Hilfssatz: Sei $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^m$ beliebig

$f:\begin{cases}[a,b]\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ stetig

Sei weiter $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge von Punkten in $\mathbb{U}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}(y_k)\overset{\exists}{=}c\ \in\mathbb{U}$

$\Rightarrow$ Die Funktionen $F_k:\begin{cases}[a,b]\to\mathbb{R}\\x\mapsto f(x,c)\end{cases}$

Satz 1: Sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ beliebig

$$f: \begin{cases} [a,b] \times \mathbb{U} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{cases} \text{stetig}$$

Für $y \in \mathbb{U}$ sei $\varphi(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$

$$\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Hilfssatz 2: $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle

$f : \mathbb{I} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ stetig, im 2. Argument stetig partiell differenzierbar

$y_k \to c,\ y_k \in \mathbb{J},\ y_k \neq c,\ c \in \mathbb{J}$

Definiere: $F_k(x) := \dfrac{f(x,y_k) - f(x,c)}{y_k - c}$

$$F(x) = D_2 f(x,c)$$

Dann konvergiert F_k auf $\mathbb{I}$ gleichmäßig gegen F.

Satz 2: $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle

$f : \mathbb{I} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ stetig, im 2. Argument stetig partiell differenzierbar

Sei $\varphi(y) := \int_{\mathbb{I}} (x,y)\,\mathrm{dx} \qquad (y \in \mathbb{J})$

Dann ist $\varphi : \mathbb{J} \xrightarrow{\mathbb{I}} \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\varphi'(y) = \int_{\mathbb{I}} D_2 f(x,y)\,\mathrm{dx}$$

Satz 3: Für jede stetige Funktion f gilt stets $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$

Satz 4: Notwendig für $S(\varphi) = \inf\limits_{\psi \in \mathbb{K}} S(\psi)$ ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_3 L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\right) - D_2 L(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$$

Hilfssatz 3: Sei $a < b,\ f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Es gelte $\int_a^b g(t) f(t)\,\mathrm{dt} = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{C}^2[a,b],\ g(a) = g(b) = 0$

Dann ist $f \equiv 0$.

Satz 4: $S(\varphi) = \inf\limits_{\psi \in K} S(\psi)$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_3 L(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - D_2 L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\right)$$

Hilfssatz 3: Sei $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

Es gelte: $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=0 \qquad \forall g\in C^2[a,b]$ mit $g(a)=g(b)=0$

Satz 1: Sei $G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ offen und $f:G\to\mathbb{R}^k$ eine bzgl. des 2. Arguments stetig partiell differenzierbare Funktion.
Dann genügt *f* in *G* lokal einer Lipschik-Bedingung.

Satz 2: (Eindeutigkeitssatz)
Sei $G\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ und $f:G\to\mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschik-Bedingung genügt.
Seien $\varphi,\psi:I\to\mathbb{R}^k$ zwei Lösungen von der DGL $y=f(x,y)$
$\varphi(a)=\psi(a)$ für ein $a\in I$, so folgt:

$$\Rightarrow \varphi(x)=\psi(x) \qquad \forall x\in I$$

Korollar: Sei $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f:G\to\mathbb{R}$ stetig, *f* genüge lokaler LB

a) Eindeutigkeitssatz:
Seien $\varphi,\psi:I\to\mathbb{R}$ 2 Lösungen von (1)
Und für ein $a\in I$ gelte:

$$\begin{aligned}\varphi(a)&=\psi(a)\\ \varphi'(a)&=\psi'(a)\\ &\vdots\\ \varphi^{(n-1)}(a)&=\psi^{(n-1)}(a)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\psi(x) \qquad \forall x\in I$$

b) Existenzsatz:
Sei $(a,b_0,\ldots,b_{n-1})\in G$ gegeben
$\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ und eine Lösung $\varphi:[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\to\mathbb{R}$

Satz 1: Seien $x_0\in I$, $y_0\in J$.

$$F:\begin{cases} I\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\end{cases},\quad G:\begin{cases} J\to\mathbb{R}\\ y\mapsto \int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{g(t)}\end{cases}$$

Sei $I'\subset I$ ein Intervall um x_0 und $F(I')\subset G(J)$
$\Rightarrow\exists$ genau eine Lösung
$\varphi:I'\to\mathbb{R}$
von *(1)* mit *AB* $\varphi(x_0)=y_0$

Satz 2: Sei $x_0 \in I$ und $b \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL
$y' = a(x)\, y$ mit $AB\, \varphi(x_0) = b_j$, nämlich

$$\varphi(x) = b \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{dt}\right)$$

Satz (Variation der Konstanten)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a.b : I \to \mathbb{R}$ stetig
$\Rightarrow$ Zu beliebigem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ von *(1)*
mit $AB\, \psi(x_0) = c$, nämlich $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{dt}\right)$,
wobei $\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{dt}\right)$

Satz 3: Sei $\psi_0 : I \to \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von *(1)*. Die allgemeine Lösung von *(1)* hat die Form $\psi = \psi_0 + \varphi$ wi φ allgemeine Lösung von *(2)* ist.

Satz 4: $I = \mathbb{R}^x$ Intervall
$(x_0, y_0) \in G,\ x_0 \in I$
Dann gilt:
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von *(1)* $y'(x_0) = y_0$
$\psi : I \to \mathbb{R},\ \psi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ Lösung von *(2)* $z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$ mit $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$

Satz 1: $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall
$A : I \to M(n \times n, \mathbb{K})$
$b : I \to \mathbb{K}$ stetig

Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ von
$y' = A(x)\, y + b(x)$ mit der AB $\varphi(x_0) = c$

Satz 2: $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall
$A : I \to M(n \times n, \mathbb{K})$ stetig
L_H = Menge der Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der homogenen linearen
Differentialgleichung $y' = A(x) \cdot y$
Dann ist L_H ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$ – Vektorraum.

Für $\varphi_1,\ldots,\varphi_k \in L_H$ ist äquivalent

i) $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ $\mathbb{K}-$linear unabhängig

ii) $\exists x_0 \in I : \varphi_k(x_0),\ldots,\varphi_k(x_0) \subset \mathbb{K}^n$ linear unabhängig

iii) $\forall x_0 \in I : \varphi_1(x_0),\ldots,\varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig

Satz 3: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $A : I \to M(n\times n, \mathbb{K})$, $b : I \to \mathbb{K}_n$ stetig.

L_H = Vektorraum der Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ von $y' = A(x)\,y$

L_I = Menge der Lösungen $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ von $y' = A(x)\,y + b(x)$

Dann gilt für beliebiges $\psi_0 \in L_I$: $L_I = \psi_0 + L_H$

Mit anderen Worten:
Man erhält die allgemein Lösung der inhomogenen DGL als Summe einer speziellen Lösungen der inhomogene DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL.

Satz 4: (Variation der Konstanten)
Bezeichnungen wie in Satz 3
Sei $\Phi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL $y' = A(x)\,y$.
Man erhält eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ der inhomogenen DGL $y' = A(x)\,y + b(x)$ durch den Ansatz $\psi(x) = \Phi(x)U(x)$, wobei $U : I \to \mathbb{K}^n$ differenzierbar mit $\Phi(x)U'(x) = b(x)$, d.h.

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\,b(t)\,\mathrm{d}t + C$$

Satz 5: Bezeichnungen wie oben.

a) Sei L_H die Menge der Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ der homogenen Gleichung *(1)*.
Dann ist L_H ein n-dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum.

b) Sei L_H die Menge der Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ der inhomogenen Gleichung *(2)*.
Dann gilt für beliebiges $\psi_0 \in L_h$: $L_I = \psi_0 + L_H$

c) Ein n-Tupel $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in L_H$ von Lösungen von *(1)* ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $x \in I$

die Wronski-Determinante $W(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

verschieden von Null ist.

Lemma 1: Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[T]$

a) Ist $P(T) = P_1(T) + P_2(T)$, so ist für jede hinreichend oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f$

b) Ist $Q(T) = P_1(T)P_2(T)$, so ist für jede hinreichend oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $Q(D)f = P_1(D)(P_2(D)f)$

Lemma 2: Für jedes $P \in \mathbb{C}[T]$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$

Korollar: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $P(T)$ (d.h. $P(\lambda) = 0$), so ist $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL $P(D)y = 0$.

Satz 3: Das Polynom $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ habe n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_n, \ldots, \lambda_1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Die Funktionen $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto x^{\lambda_k x} \end{cases}$ $(k = 1, \ldots, n)$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0$

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom n-ten Grades $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ besitzt genau n Nullstellen und Vielfachheiten,
d.h. $P(T) = (T - \lambda_1)^{k_1}(T - \lambda_2)^{k_2} \cdots (T - \lambda_r)^{k_r}$
mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ und $k_i \geq 1 \ \forall i$.

Lemma 4: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(I)$

$\Rightarrow (D - \lambda)^k \left(f(x)e^{\lambda x}\right) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$

Lemma 5: Sei $P \in \mathbb{C}[T]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) \neq 0$, $g \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad k

$\Rightarrow P(D)\left(g(x)e^{\lambda x}\right) = h(x) \cdot e^{\lambda x}$
mit einem Polynom $h \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad k.

Satz 6: Sei $P(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \cdots (T - \lambda_r)^{k_r}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i, j$ und $k_i \geq 1 \ \forall i$

$\Rightarrow$ Die DGL $P(D)y = 0$ *(1)* hat Fundamentalsystem von Lösungen:

$$\varphi_{jm}(x) = x^m e^{\lambda_j x} \text{ für} \begin{cases} j = 1, \ldots, r \\ 0 \leq m \leq k_j - 1 \end{cases}$$

Sätze

Satz 1: Für beschränkte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $x_0\in\mathbb{R}$ sind äquivalent:

1) f ist stetig in x_0
2) $\omega_f(x_0)=0$

Satz 2: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $\varepsilon>0$

$\Rightarrow U_\varepsilon(f)$ kompakt

Lemma 3: $M\subset\mathbb{R}$ endlich oder abzählbar

$\Rightarrow M$ ist Nullmenge

Lemma 4: $M_\nu\subset\mathbb{R}$ Nullmenge $\forall\nu\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \text{ ist Nullmenge}$$

Lemma 5: Für kompakte Menge $K\subset\mathbb{R}$ sind äquivalent:

1) K ist Nullmenge
2) $\forall\varepsilon>0\ \exists$ endlich viele Intervalle $I_1,\dots,I_n$ mit $K\subset\bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$ mit $\sum_{\nu=1}^{n}|I_\nu|<\varepsilon$

Lebesgnesche Integrabilitätskriterium

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sind äquivalent:

1) f ist auf $[a,b]$ (Riemann-)integrierbar
2) f ist beschränkt und fast überall stetig

Lemma 6: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar

$\Rightarrow f$ beschränkt

Lemma 7: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar

$\Rightarrow M(f)=$ Nullmenge

Satz 8: Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar und ist $f=g$ fast überall

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

Lemma 9: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar

$\Rightarrow\exists$ Folge von Treppenfunktionen

$\varphi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $\varphi_n\nearrow f$ fast überall auf $[a,b]$

Satz 10: Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ (Riemann-)integrierbar und $f_n \leq f$

Angenommen: $f_n \nearrow f$ fast überall auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$