Kapitel I

§1 Bilinearform

Wdh.: Vektorraum $\mathbb{V} \overset{z.B.}{=} \mathbb{R}^n$ Addition+Skalarmultiplikation

Lineare Abbildung: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V} \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \end{cases}$$

Linearformen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare Abbildung

Skalarprodukt: $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Bilinear: $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \langle v_2, w \rangle$

$\langle v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \rangle = \beta_1 \langle v, w_1 \rangle + \beta_2 \langle v, w_2 \rangle$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = {}^t v \cdot 1 w \text{, mit } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

$\langle .,. \rangle$ ist positiv definierte symmetrische Bilinearform

Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Bilinearform** auf $\mathbb{V}$ ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}, \quad (v, w) \mapsto \varphi(v, w)$

die in beiden Argumenten (v und w) $\mathbb{K}$-linear ist.

D.h. für $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{V}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \varphi(v_1, w) + \alpha_2 \varphi(v_2, w)$$

$$\varphi(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 \varphi(v, w_1) + \beta_2 \varphi(v, w_2)$$

Beispiele:

a) Sei $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ quadratische Matrix,

dann ist $\varphi_B : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \; \varphi_B(v, w) = {}^t v B w = \langle v, Bw \rangle = \langle {}^t B v, w \rangle$

wenn $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \; B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

$$\varphi_B(v, w) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} v_i b_{i1},\dots,\sum_{i=1}^{n} v_i b_{in}\right)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_i b_{ij} w_j=\sum_{i,j=1}^{n} v_i b_{ij} w_j$$

b) $\mathbb{V}=\mathcal{C}^o[0,1]=\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen

k: $[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig

$\varphi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$

$$\varphi(f,g)=\int_0^1\int_0^1 f(x)k(x,y)g(y)\,dxdy$$

Bilinearform auf $\mathbb{V}$

c) $f,g\in\mathbb{V}^*=Hom(\mathbb{V},\mathbb{K})=\{\text{Linearformen auf } V\}$

$f:\mathbb{V}\to\mathbb{K},\qquad g:\mathbb{V}\to\mathbb{K}$

Tensorprodukt von *f* mit *g* $\quad f\otimes g:\begin{cases}\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}\\ (v,w)\to f(v)\cdot g(w)\end{cases}$

ist Bilinearform auf $\mathbb{V}$.

Satz 1: a) Die Menge aller Bilinearformen auf einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{V}$ bildet wieder einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

b) Ist $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von $\mathbb{V}$, so ist jede Bilinearform φ eindeutig durch die Werte $\varphi(v_i,v_j)$, $1\le i,j\le n$ festgelegt.

c) Zu jedem $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ gibt es genau eine Bilinearform $\varphi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ mit $\varphi(v_i,v_j)=b_{ij}\quad\forall i,j=1,\dots,n$

Beweis: a) Z.z.: {Bilinearformen} ist Untervektorraum des Vektorraumes der Linearform auf $\mathbb{V}\times\mathbb{V}$

$\left(\mathbb{V}=\mathbb{R}^n\Rightarrow\mathbb{V}\times\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2n}\right)$

dazu: - nicht leer, da $\mathbb{1}_n\Rightarrow\varphi_1(v,w)={}^t v\cdot\mathbb{1}w$

- seien $\varphi,\psi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ Bilinearformen und $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, so ist durch

$$(\alpha\varphi+\beta\psi)(v,w)=\alpha\varphi(v,w)+\beta\psi(v,w)$$

wieder eine Bilinearform auf $\mathbb{V}$ definiert $\Rightarrow$ a)

b) $x=\sum x_i v_i,\qquad y=\sum y_i v_i\in\mathbb{V}$

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\sum_i x_i v_i,\sum_j y_j v_j\right)=\sum_i\sum_j x_i y_j\varphi(v_i,v_j)\Rightarrow\text{b)}$$

c) Setze $\varphi\left(v_i, v_j\right) = b_{ij}$
und definiere $\varphi : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{K}$ durch lineare Fortsetzung
d.h.: $\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j v_j\right) = \sum_i\sum_j x_i y_j \varphi\left(v_i, v_j\right) = \sum_i\sum_j x_i b_{ij} y_j$ $\square$

Die Matrix B aus Satz 1 c) heißt Darstellungsmatrix (Matrix) der Bilinearform φ.
Die Wahl einer Basis $v_1,\dots,v_n$ von $\mathbb{V}$ definieren einen **Vektorraumisomorphismus**.

$\{\text{Bilinearform auf } \mathbb{V}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

$\varphi \to B = \left(\varphi\left(v_i, v_j\right)\right)$

Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(v_i,v_j) \arrow[rrrr, dotted] \arrow[ddddd] & & & & \varphi(v_i,v_j)=b_{ij} \arrow[ddddd, equal] \\
& (v_i,v_j) \arrow[dddd] & \mathbb{V}\times\mathbb{V} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbb{K} \arrow[d, equal] & \\
& & \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n \arrow[r, "\varphi_B"] & \mathbb{K} & \\
& & (x,y) \arrow[r] & {}^t xBy & \\
& (e_i,e_j) & & & \\
(e_i,e_j) \arrow[rrrr, dotted] & & & & {}^t e_i B e_j = b_{ij}
\end{tikzcd}$$

Beispiele a) Darstellungsmatrix von $f\otimes g$
Sei $f(v_i) = f_i, \quad g(v_j) = g_j$
$\Rightarrow (f_1,\dots,f_n), (g_1,\dots,g_n)$ Darstellungsmatrizen von f und g
$(f\otimes g)\left(v_i, v_j\right) = f(v_i)\cdot g(v_j) = f_i g_j$

$$\left(f_i\cdot g_j\right) = \begin{pmatrix} f_1 g_1 & \cdots & f_1 g_n \\ \vdots & \ddots & \\ f_n g_1 & & f_n g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} (g_1,\dots,g_n)$$

b) $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Standardbasis $e_1,\dots,e_n$
$\left\langle e_i, e_j\right\rangle = {}^t e_i e_j = \delta_{ij}$
$\left(\delta_{ij}\right) = \mathbb{1}_n$

$\mathbb{1}$ ist die Darstellungsmatrix vom Skalarprodukt

Basiswechsel bei Bilinearformen

$\varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ Bilinearform

Basis $v_1, \dots, v_n \to$ Darstellungsmatrix $B = \left(\varphi\left(v_i, v_j\right)\right)_{ij}$

2.Basis $w_1, \dots, w_n \to$ Darstellungsmatrix $B' = \left(\varphi\left(w_i, w_j\right)\right)_{ij}$

$$\text{Übergangsmatrix C: } w_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} v_i \qquad \otimes$$

$$b'_{kl} = \varphi\left(w_k, w_l\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik} v_i, \sum_{j=1}^{n} c_j l v_j\right) = \sum_{i,j} c_{ik} c_{jl} \varphi\left(v_i, v_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j} c_{ik} c_{jl} b_{ij} = \sum_{i,j} c_{ik} b_{ij} c_{jl} = \left({}^t CBC\right)_{kl}$$

$$\Rightarrow B' = {}^t CBC$$

zum Vergleich: $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ mit Darstellungsmatrix B bzgl.: $v_1, \dots, v_n$ und B'' bzgl. $w_1, \dots, w_n$

$$f\left(v_i\right) = \sum_{s=1}^{n} b_{si} v_s$$

$$f\left(w_k\right) = \sum_{l=1}^{n} b''_{lk} w_l$$

$$f\left(w_k\right) \overset{\otimes}{=} \sum_i c_{ik} f\left(v_i\right) = \sum_i c_{ik} \sum_s b_{si} v_s = \sum_{i,s} b_{si} c_{ik} v_s$$

$$\|$$

$$\sum_{l=1}^{n} b''_{lk} w_l = \sum_l \sum_s b''_{lk} c_{sl} v_s = \sum_{l,s} c_{sl} b''_{lk} v_s$$

Koeffizientenvergleich:

$$BC = CB'' \quad \Leftrightarrow \quad B'' = C^{-1} BC$$

Zusammenfassung

$B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ Darstellungsmatrix bzgl. Basis $v_1, \dots, v_n$

$C \in Gl_n(\mathbb{K})$ Übergangsmatrix von Basis $w_1, \dots, w_n$ zu Basis $v_1, \dots, v_n$

$$w_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} v_i$$

Transformationsverhalten bzw. Darstellungsmatrix bzgl. $w_1, \dots, w_n$

${}^t CBC$ als Bilinearform $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$

$C^{-1} BC$ als Endomorphismus $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$