

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

Vorlesung 10/11

Dienstag, 25. Mai 2004

Fall  $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ ,  $\dim \mathbb{V} < \infty$ , mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  linear (Endomorphismus) bzgl. ONB  $M \in M_n(\mathbb{K})$

$\mathbb{K}$	Abbildung $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$	Matrix $M \in M_n(\mathbb{K})$
$\mathbb{R}$	orthogonal $\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle$ selbstadjungiert $\langle Mx, y \rangle = \langle x, My \rangle$ antiselbstadjungiert $\langle Mx, y \rangle = -\langle x, My \rangle$	orthogonal ${}^t M M = \mathbb{1} \Leftrightarrow M^{-1} = {}^t M$ symmetrisch ${}^t M = M$ alternierend ${}^t M = -M$
$\mathbb{C}$	unitär $\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle$ selbstadjungiert $\langle Mx, y \rangle = \langle x, My \rangle$ antiselbstadjungiert $\langle Mx, y \rangle = -\langle x, My \rangle$	unitär ${}^t M \bar{M} = \mathbb{1} \Leftrightarrow M^{-1} = {}^t \bar{M}$ hermitesch ${}^t \bar{M} = M$ antihermitesch ${}^t \bar{M} = -M$

**Satz 2:** Für jeden Eigenwert  $\lambda$  einer linearen Abbildung  $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  gilt:  
 $M$  unitär  $\Rightarrow |\lambda| = 1$   
 $M$  selbstadjungiert  $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$   
 $M$  antiselbstadjungiert  $\Rightarrow \lambda$  rein imaginär

**Beweis:** Sei  $v$  Eigenvektor zu  $\lambda$

$M$  unitär  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0} = \langle Mv, Mv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 = 1$$

$M$  selbstadjungiert  $\Rightarrow$

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle v, Mv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$M$  antiselbstadjungiert  $\Rightarrow$

$$\langle iMx, y \rangle = -\langle ix, My \rangle = -i \langle x, My \rangle = \bar{i} \langle x, My \rangle$$

$$\Leftrightarrow iM \text{ selbstadjungiert} \quad \Rightarrow \text{Behauptung } \square$$

**Zusammenfassung:**

Komplexe Matrix $M$	Reelle Matrix $M$	Eigenwert
unitär ${}^t \bar{M} = M^{-1}$	orthogonal ${}^t M = M^{-1}$	$ \lambda  = 1$
hermitesch ${}^t \bar{M} = M$	symmetrisch ${}^t M = M$	$\lambda$ reell
antihermitesch ${}^t \bar{M} = -M$	alternierend ${}^t M = -M$	$\lambda$ rein imaginär

**Satz 3:** Hauptachsentransformation selbstadjungierter Abbildungen  
 Es sei  $\mathbb{V}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  selbstadjungiert.  
 Dann existiert eine ONB  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{V}$  aus Eigenvektoren für  $M$ .

**Beweis:**  $\mathbb{C} \quad M \neq 0$

Beweis durch Induktion über  $n = \dim \mathbb{V}$

Fundamentalsatz der Algebra  $\Rightarrow$

$\exists$  Eigenwert  $\lambda_1 \neq 0$

Sei  $v_1$  Eigenvektor zu  $\lambda_1$ ,  $\mathbb{C} \langle v_1, v_1 \rangle = 1$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit  $\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{C}v_1 \oplus v_1^\perp$

$\dim v_1^\perp = n - 1$

$w \in v_1^\perp$

$$\langle Mw, v_1 \rangle = \langle w, Mv_1 \rangle = \langle w, \lambda v_1 \rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle w, v_1 \rangle}_{=0 \text{ (da } w \in v_1^\perp)} = 0$$

$$\Rightarrow Mw \in v_1^\perp$$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{C}v_1 \oplus v_1^\perp \text{ ist } M \text{ invariant}$$

$$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_{v_1^\perp} \text{ ist wieder positiv definit}$$

$$\Rightarrow \text{auf } v_1^\perp \text{ ein inneres Produkt}$$

auch  $M/v_1^\perp$  ist selbst adjungiert bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_{v_1^\perp}$

Induktionsvoraussetzung:

$\exists$  ONB  $v_2, \dots, v_n$  von  $v_1^\perp$  aus Eigenvektoren

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$  ist ONB von  $\mathbb{V}$  aus Eigenvektoren für  $M$

**Korollar 4:** Hauptachsentransformation für hermiteschen Matrizen

Zu jeder hermiteschen Matrix  $M \in M_n(\mathbb{C})$  gibt es eine unitäre

Matrix  $U \in M_n(\mathbb{C})$ , so dass

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

**Korollar 5:** Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen

Zu jeder symmetrischen Matrix  $S \in M_n(\mathbb{R})$ , gibt es eine orthogonale

Matrix  $O \in O_n(\mathbb{R})$ , so dass

$$O^{-1}MO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

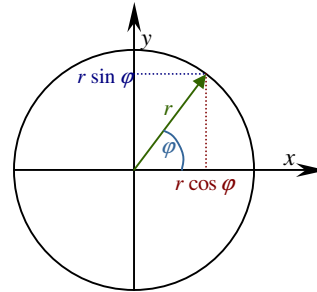
## §10 Quadriken

Beispiel: Kreis  $K$  mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$  alle Punkte auf  $K$  haben Koordinaten

der Form 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K$  gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$$



Kreisgleichung:  $x^2 + y^2 = r^2$

Polynom vom Grad 2 = quadratisches Polynom

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = r^2 = 0 \right\} = \text{Quadrik}$$

Allgemein:

$\mathbb{K}$  Körper mit  $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

Die Nullstellenmenge:

$$Q = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid q(x) = 0 \right\} \text{ heißt Quadrik}$$

In Matrizenschreibweise:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t x A x, \quad A = (a_{ij})$$

Beispiel:  $\mathbb{R}^2$ ,  $q$  homogen vom Grad 2, d.h.  $b_i = c = 0$

$$q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 = {}^t x \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x =$$

$$= a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = {}^t x \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} x$$

Das gilt im Allgemeinen:  ${}^t x A x = {}^t x {}^t A x = {}^t x \left( \frac{1}{2} (A + {}^t A) \right) x$

$\Rightarrow \textcircled{E}$   $A$  symmetrisch

$$\sum_{k=1}^n b_k x_k = {}^t b x \quad \text{mit } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

Vorlesung 10/11

Dienstag, 25. Mai 2004

⇒ Allgemeine Form einer Quadrilengleichung

$$q(x) = {}^t xAx + 2bx + c$$

mit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  symmetrisch  $b \in \mathbb{K}^n, c \in \mathbb{K}$

Sei  $A' = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$  erweiterte Koeffizientenmatrix von  $Q$

und  $x' = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$  erweiterter Vektor

$$\Rightarrow q(x) = {}^t x'A'x'$$

Mit  $A$  ist auch  $A'$  symmetrisch

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quadratische Polynome} \\ \text{in Variablen } x_1, \dots, x_n \end{array} \right\} \xleftrightarrow{!} \{A' \in M_{n+1}(\mathbb{K}) \text{ symmetrisch}\}$$

Ziel: Klassifikation der Quadriken

Beispiel: Kreisgleichung

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 \quad \Rightarrow Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid q(x_1, x_2) = 0 \right\}$$

Koordinatentransformation:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ r & b \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto Tx = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y$$

$$T(Q) = \{y = T(x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Q\}$$

$$= \{y = T(x) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = 0\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid q(T^{-1}(y)) = 0\}$$

$$q \circ T^{-1}: q(T^{-1}(y)) = q\left(\frac{r}{a}y_1, \frac{r}{b}y_2\right) =$$

$$= \frac{r^2}{a^2}y_1^2 + \frac{r^2}{b^2}y_2^2 - r^2$$

$$q(T^{-1}(y)) = 0 \Leftrightarrow \frac{r^2}{a^2}y_1^2 + \frac{r^2}{b^2}y_2^2 - r^2 = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{r^2} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Ellipsengleichung}$$

⇒  $T(Q)$  Ellipse

Kreisgleichung in erweiterter Form:

$$q(x) = {}^t x' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} x'$$

Koordinatentransformation:

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y'$$

$$T_2(Q) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid y' = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } q(x) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid {}^t (T_2^{-1} y') \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -r^2 \end{pmatrix} (T_2^{-1} y') = 0 \right\}$$

$${}^t (T_2^{-1} y') \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -r^2 \end{pmatrix} (T_2^{-1} y') = {}^t y' {}^t T_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -r^2 \end{pmatrix} T_2^{-1} y'$$

$$= {}^t y' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y'$$

$$= (y_1, y_2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & -r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - 2ay_1 - 2by_2 - r^2$$

$$= (y_1 - a)^2 + (y_2 - b)^2 - a^2 - b^2 - r^2$$

$$T_2(Q) = \text{Kreis um } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit Radius } \sqrt{a^2 + b^2 + r^2}$$

**Definition:** Eine **affine Abbildung** des  $\mathbb{K}^n$  ist eine Abbildung der Form

$$F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad F(x) = Cx + t, \quad C \in \text{Gl}_n(\mathbb{K}), \quad t \in \mathbb{K}^n$$

$t =$  **Translationsvektor** der affinen Abbildung  $F$

2 Quadriken  $Q_1$  und  $Q_2$  in  $\mathbb{K}^n$  heißen **äquivalent**,

wenn sie sich um eine affine Abbildung  $F$  unterscheiden  $Q_2 = F(Q_1)$

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

Vorlesung 10/11

Dienstag, 25. Mai 2004

**Bemerkung:** Die Aufgabe, alle Quadriken zu klassifizieren bedeutet, zu jeder Äquivalenzklasse  $\{F(Q) \mid F \text{ affin}\} = [Q]$  von Quadriken eine „besonders schöne“ Normalform zu finden.

Affine Abbildungen des  $\mathbb{K}^n$  kann man durch lineare Abbildungen des  $\mathbb{K}^{n+1}$  beschreiben:

$$F: \mathbb{K}^n, \quad F(x) = Cx + t$$

$$F': \mathbb{K}^{n+1}, \quad F' = \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F'(x') = \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx + t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = y'$$

$$\text{Sei } q(x) = {}^t x' A' x = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q \circ F(x) = q(y) = {}^t y' A' y = {}^t x' \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x'$$

$$\begin{aligned} {}^t \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^t C & 0 \\ {}^t t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t C & 0 \\ {}^t t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AC & At + b \\ {}^t b C & {}^t b t + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t C A C & {}^t C (At + b) \\ {}^t t A C + {}^t b C & \underbrace{{}^t t A t + {}^t t b + {}^t b t + c}_{C'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ x \in \mathbb{K}^n \mid \underbrace{q \circ F(x)}_y = 0 \right\} = \{ x \in F'(y) \mid q(y) = 0 \} = F^{-1} \{ y \mid q = 0 \}$$

**Zusammenfassung:**

$$Q = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid {}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0 \}$$

$F^{-1} \downarrow$

$$F^{-1} Q = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid {}^t x' C A C x + 2 {}^t (At + b) C x + C' = 0 \}$$

$$C' = {}^t t A t + {}^t b t + {}^t t b + c$$

**Herleitung der Normalform:**

$$\text{Starte mit } q(x) = {}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0 \text{ bzw. } A' = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

$$A \text{ symmetrisch} \Rightarrow \exists C \in \text{Gl}_n(\mathbb{K}): {}^t C A C = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \text{ Diagonalmatrix}$$

$\Rightarrow \exists A$  Diagonalmatrix



# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

Vorlesung 10/11

Dienstag, 25. Mai 2004

$$\Rightarrow {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} x + c'' = 0$$

$$\text{NR: } {}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_r & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_r & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\Leftrightarrow {}^t x A x + 2 \underbrace{{}^t e_{r+1}}_{x_{r+1}} x + c'' = 0$$

$$\text{Benutze: } F_3(x) = x - \frac{c''}{2} e_{r+1}$$

$$\Rightarrow {}^t x A x + 2 \left( -A \left( \frac{c''}{2} e_{r+1} \right) + e_{r+1} \right) x - \frac{c''}{2} \underbrace{{}^t e_{r+1} e_{r+1}}_{=1} - \frac{c''}{2} \underbrace{{}^t e_{r+1} e_{r+1}}_{=1} + c'' = 0$$

Möglichkeiten in Dimensionen  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

dim = n	Gleichung	Quadrate
1	$x^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
	$x^2 - 1 = 0$	2 Punkte
	$x^2 = 0$	1 Punkt (zählt doppelt)
2	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Kreis
	$x^2 + y^2 = 0$	Punkt
	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Hyperbel
	$x^2 - y^2 = 0$	Schneidendes Geradenpaar
	$x^2 + y = 0$	Parabel
	$x^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
	$x^2 - 1 = 0$	Parallele Geraden
	$x^2 = 0$	1 Doppelgerade