§ 9 Die klassischen Gruppen

Hier: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (geht auch über $\mathbb{H} =$ Hemiltonsche Quaterionen)

$\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$

Allgemeine lineare Gruppe $=$ Automorphismen von $\mathbb{V}$

$$\mathrm{Gl}(\mathbb{V}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{V}) = \{ f : \mathbb{V} \to \mathbb{V} \mid f \text{ invertierbar} \}$$

in Koordinaten:

$$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}) = \{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det M \neq 0 \}$$

Spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{K}) = \{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1 \}$$

$\Rightarrow \mathrm{Sl}_n(\mathbb{K})$ Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$

Sesquilinearform auf $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$

sesqui (lat.) : semi (=halb) + que (=und) $\approx$ anderthalb

$$\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \ \varphi(x, y) = {}^t x B \overline{y} \ \text{ mit } B \in M_n(\mathbb{K})$$

Weitere Voraussetzung: φ nicht ausgeartet bzw. $\det B \neq 0$

Automorphismen von $(\mathbb{V}, \varphi) = (\mathbb{K}, B)$

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{V}, \varphi) = \{ f : \mathbb{V} \to \mathbb{V} \mid \varphi(f(v), f(w)) = \varphi(v, w), \ \forall v, w \in \mathbb{V} \}$$

in Koordinaten:

$$\mathrm{Aut}_n(\mathbb{K}, B) = \{ M \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t M B \overline{M} = B \}$$

Bemerkung: $\mathrm{Aut}(\mathbb{V}, \varphi) \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{V})$

Für spezielle Sesquilinearformen erhalten wir die sogenannten **klassischen Gruppen**.

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad O_n(\mathbb{R}) = \{ M \mid {}^t M M = \mathbb{1} \}$ orthogonale Gruppe

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad O_{r,s}(\mathbb{R}) = \left\{ M \,\middle|\, {}^t M \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \right\}$$

orthogonale Gruppe vom Index (r, s)

für $(r, s) = (3,1) \Rightarrow O_{3,1}(\mathbb{R})_0 =$ **Lorentzgruppe** der Raumzeit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ M \,\middle|\, {}^t M \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **symplektische Gruppe**

$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \ B = \mathbb{1} \Rightarrow U_n(\mathbb{C}) = \{ M \mid {}^t M \overline{M} = \mathbb{1}_n \}$ **unitäre Gruppe**

Kapitel II

§1 Produktionsmodelle (Einführungsbeispiel)

Beispiel: (Klamroth)
Unternehmen: „LeckerSchoki&Co.“

2 neue Produkte:
P_1 : feines Kakaopulver
P_2 : herbe Zartbitterschokolade
3 Produktionsanlagen: F_1, F_2, F_3
F_1 : Kakaobohnen werden gereinigt, geröstet und gebrochen
F_2 : daraus wird in F_2 das Kakaopulver P_1 hergestellt
F_3 : daraus wird in F_3 die Schokolade P_2 hergestellt
Gesamte Produktionsmenge wird abgesetzt

Profit: bei P_1: 30€ pro 50kg Kakaopulver $=1$ PE von P_1
bei P_2: 50€ pro 100kg Schokolade $=1$ PE von P_2

PE = Produktionseinheit

Beschränkte Kapazitäten bei F_1, F_2, F_3
1 PE von P_1 benötigt 3% der täglichen Kapazität von F_1
1 PE von P_2 benötigt 2% der täglichen Kapazität von F_1
18% der Gesamtkapazität von F_1 stehen täglich für P_1, P_2 zur Verfügung

	P_1	P_2	Gesamt
F_1	3%	2%	18%
F_2	1%	0	4%
F_3	0	2%	12%

Problem: Wie viele Produktionseinheiten x_1 von P_1 und x_2 von P_2 sollen täglich hergestellt werde, um den Profit zu maximieren?

Das kann durch ein **lineares Programm (LP)** formuliert werden

Maximiere: $30x_1 + 50x_2 = cx = (c_1, c_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **lineare Zielfunktion**

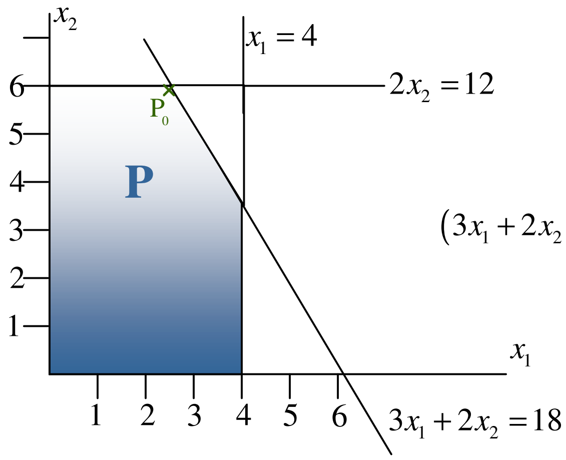
Rahmenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \le 18 \\ x_1 & \le 4 \\ 2x_2 & \le 12 \end{array}\right\} \text{ funktionelle Nebenbedingungen}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}\right\} \text{ Vorzeichenbedingung}$$

Jedes $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ das alle Nebenbedingungen erfüllt, heißt **zulässige Lösung** des LP`s und cx ist der Zielfunktion von x.

Graphische Lösung des LP`s



$$(3x_1 + 2x_2 = 18) \ni \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{P} =$ Menge der zulässigen Lösungen

P ist Durchschnitt von Halbebenen $\Rightarrow$ konvexes Polyeder

konvex:
weil jeder Punkt auf der Verbindung zweier beliebiger Punkte $\in$ P ebenfalls $\in$ P ist!

Nun zur Zielfunktion: $z = cx = 30x_1 + 50x_2$

Für $z \in \mathbb{R}$ fest $z = cx$ Gerade G_z

Für 2 verschiedene Werte z_1, z_2 erhalten wir parallele Geraden G_{z_1}, G_{z_2}

z.B. $z = 150$ $\quad G_{150} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| 30x_1 + 50x_2 = 150 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| 3x_1 + 5x_2 = 15 \right\}$

$z = 200$ $\quad G_{200} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| 3x_1 + 5x_2 = 20 \right\}$

$\Rightarrow$ eine Lösung des LP ist das z (bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$), so dass die Gerade G_z den

Punkt $P_0 = \{3x_1 + 2x_2 + 18\} \cap \{x_2 = 6\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ trifft.

Rechnung: $z = 30x_1 + 50x_2 \quad \Big| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ einsetzen

$$z = 30 \cdot 2 + 50 \cdot 6 = 360$$

$\Rightarrow$ Lösung $z = 360$ (€)

D.h.: Der Profit ist optimal, wenn pro Tag $x_1 = 2$ PE P_1 und $x_2 = 6$ PE P_2 produziert werden.

§ 2 Affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$

Beispiel: Geraden in $\mathbb{R}^2$

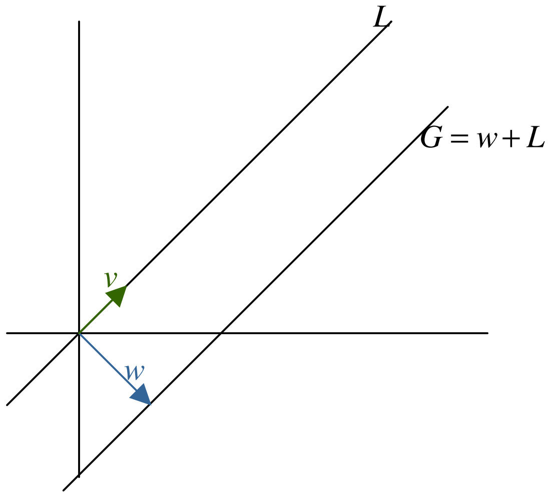
Lineare eindimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^2$

$=$ 1-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$

$=$ Geraden durch 0 in $\mathbb{R}^2$

$L = \mathbb{R}v$

$G = w + L = w + \mathbb{R}v$



In Gleichungen: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

v genügt der Gleichung:

$$v_2 x_1 - v_1 x_2 = 0$$

D.h.: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v_2 x_1 - v_1 x_2 = 0 \right\}$

Sei $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ und $v_2 w_1 - v_1 w_2 = c \quad \neq 0$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v_2 x_1 - v_1 x_2 = c \right\}$$

G ist ein affiner 1-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^2$

Wiederholung: Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$

$=$ Lösungsmenge von homogenen Gleichungssystemen

$=$ Lineare Hüllen span M von Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$

z.B. $A \in M(r \times n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + & \cdots & + a_{rn}x_n & = 0 \end{matrix}$$

$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$ ist UVR von $\mathbb{R}^n$ mit der Dimension $\dim U = n - \operatorname{Rg} A$

Jede Zeile dieses Gleichungssystems ist eine Linearform.

$h_1, \ldots, h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$h_i(x) = h_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$$

$$\Rightarrow U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) = \ldots = h_r(x) = 0 \}$$

Sei $H_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, h_i(x) = 0 \right\} =$ UVR von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$

H_i ist **Hyperebene**

$\Rightarrow U = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$

Definition: Ein **affiner Unterraum** $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ der Form

$$\mathcal{A} = U + w$$

mit einem $w \in \mathbb{R}^n$ und einem UVR $U \subset \mathbb{R}^n$.