$$\mathbb{U}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, h_1(x)=0,\dots,h_r(x)=0\right\}$$

$$h_i(x)=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n$$

$$w\in\mathbb{R}^n,\ Aw=c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix},\quad \text{d.h. } h_i(w)=c_i \qquad \text{für } i=1,\dots,r$$

Lemma 1: $\mathcal{A}:=w+\mathbb{U}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax=c\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, h_i(x)=c_i,\ i=1,\dots,r\right\}$

$$=\bigcap_{i=1}^{r}\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, h_i(x)=c_i\right\}$$

Beweis: z.Z.: $w+\mathbb{U}=\{Ax=c\}$

"$\subset$": Sei $u\in\mathbb{U}$ und damit $w+u=x\in\mathcal{A}$

$$\Rightarrow Ax=A(w+u)=\underbrace{Aw}_{=c}+\underbrace{Au}_{=0}=c \quad \Rightarrow x\in\{Ax=c\}$$

$$\Rightarrow w+\mathbb{U}\subset\{Ax=c\}$$

"$\supset$" $x\in\{Ax=c\},\ A(x-w)=\underbrace{Ax}_{=c}-\underbrace{Aw}_{=c}=0$

$$\Rightarrow x-w\in\mathbb{U} \quad\Leftrightarrow\quad x\in w+\mathbb{U}$$

$$\{Ax=c\}\subset\mathbb{U} \qquad \square$$

Lemma 2: Sei $\mathcal{A}=w+\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Dann ist
$\mathcal{A}-a=\mathbb{U}\quad\forall a\in\mathcal{A}$
Insbesondere ist $\mathbb{U}$ eindeutig bestimmt.

Beweis: $a\in A,\ a=w+u$ mit $u\in\mathbb{U}$

$$A-a=w+\mathbb{U}-(w+u)=\mathbb{U}-u=\mathbb{U} \qquad \square$$

Definition: Die **Dimension eines affinen Unterraums** $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ ist die Dimension des eindeutig bestimmten zu $\mathcal{A}$ gehörigen UVR $\mathbb{U}$.

$$\mathcal{A}=w+\mathbb{U}\quad\Rightarrow \dim\mathcal{A}=\dim\mathbb{U}$$

Korollar 3: Für $\mathcal{A}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax=c\right\}$ gilt:
$\dim\mathcal{A}=n-\operatorname{Rg}A$

Eine affine Hyperebene $H\subset\mathbb{R}^n$ ist ein affiner UR der Dimension $n-1$.
Darstellung von H:

$H=v+\mathbb{U},\ \mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ Hyperebene (linear)

$\mathbb{U}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle a,x\rangle=0\right\}$ für ein $a\in\mathbb{R}^n$

$=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, {}^t ax=0\right\}$

$=a^\perp=$ der zu a orthogonale UVR

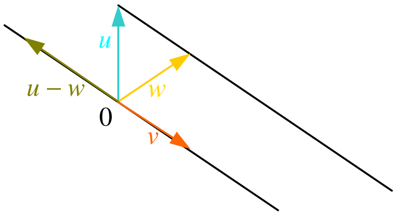
Sei $\langle a,v\rangle=:b \quad\Rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle a,x\rangle=b\right\}$

Beispiel: Affine Gerade in $\mathbb{R}^n$

$v, w \in \mathbb{R}^n,\ \ L := \mathbb{R}v$ 1-dimensionaler UVR

$G = w + L$ affine Gerade

Insbesondere $w \in G$. Sei $u \in G,\ \ w \neq u$



Ein beliebiger Punkt auf G ist von der Form:

$$w + t(u - w) = (1-t)w + tu$$

$$G = \{(1-t)w + tu \mid t \in \mathbb{R}\} = \{sw + tu \mid s, t \in \mathbb{R},\ \ s + t = 1\}$$

Wiederholung: Für Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$ eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_r$ und die Lineare Hülle bzw.

$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$ ist die Menge aller Linearkombinationen

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\} = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^n$

Definition: Eine **Affinkombination** von Vektoren $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ ist eine Summe der Form $\alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_r v_r$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}^n,\ \ \alpha_0 + \ldots + \alpha_r = 1$

Für eine beliebige Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ wird die Menge aller Affinkombinationen von Vektoren aus M die **Affine Hülle** von M genannt.

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ und A die Affine Hülle von M

$$\Rightarrow A \subset \operatorname{span} M$$

Proposition 4: Die Affine Hülle A einer Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein affiner Unterraum.

Beweis: $v \in M \ \Rightarrow\ v = 1 \cdot v \in A \ \Rightarrow\ M \subset A$

Es genügt zu Zeigen: $A = v + \operatorname{span}(M - v)$ mit $M - v = \{w - v \mid w \in M\}$

Für $v_0, \ldots, v_r \in M$ und $\alpha_0, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R},\ \ \alpha_0 + \ldots + \alpha_r = 1$

$$\Rightarrow A \ni \sum_{i=0}^{r} \alpha_i v_i = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i (v_i - v) + \sum_{i=0}^{r} \alpha_i v = \underbrace{\sum_{i=0}^{r} \alpha_i (v_i - v)}_{\in \operatorname{span}(M - v)} + v \in v + \operatorname{span}(M - v)$$

Umgekehrt: Für $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \beta_i (v_i - v) \in \operatorname{span}(M - v)$$

Es gilt: $v+\sum_{i=1}^{r}\beta_i(v_i-v)=v+\sum_{i=1}^{r}\beta_i v_i-\sum_{i=1}^{r}\beta_i v=\underbrace{\left(1-\sum_{i=1}^{r}\beta_i\right)}_{=:\beta_0}v+\sum_{i=1}^{r}\beta_i v_i$

mit $\beta_0+\sum_{i=1}^{r}\beta_i=1$

$$\Rightarrow v+\sum_{i=1}^{r}\beta_i(v_i-v)\in A \qquad \square$$

Korollar 5: Für eine nichtleere Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ sind äquivalent:
a) A ist affiner Unterraum
b) Für $v,w\in A$ liegt auch die Gerade durch v und w in A
c) Für $v_0,\dots,v_r\in A$ liegt auch jede Affinkombination von $v_0,\dots,v_r$ in A

Sei $v_1,\dots,v_r\in\mathbb{R}^n$

Wiederholung: $v_1,\dots,v_r$ heißen linear unabhängig, wenn $\dim\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_r\}=r$

Seien $w_0,\dots,w_r\in\mathbb{R}^n$ und A die Affine Hülle von $\{w_0,\dots,w_r\}$

☆ $\Rightarrow A=w_0+\operatorname{span}\{w_1-w_0,\dots,w_r-w_0\}$

$\Rightarrow \dim A=\dim\operatorname{span}\{w_1-w_0,\dots,w_r-w_0\}$

Definition: Die Vektoren/Punkte $w_0,\dots,w_r$ heißen **affin unabhängig**, wenn $w_1-w_0,\dots,w_r-w_0$ linear unabhängig.

Proposition 6: Sei A die affine Hülle von $w_0,w_1,\dots,w_r$. Dann sind äquivalent:
a) $w_0,w_1,\dots,w_r$ sind affin unabhängig
b) Für jedes $w=\sum_{i=0}^{r}\beta_i w_i\in A$ sind die Koeffizienten $\beta_0,\dots,\beta_r\in\mathbb{R}$ (mit $\beta_0+\dots+\beta_r=1$) eindeutig bestimmt

Beweis: a) $\Rightarrow$ b)

Annahme: $A\ni w=\sum_{i=0}^{r}\beta_i w_i=\sum_{i=0}^{r}\gamma_i w_i,\quad \beta_i,\gamma_i\in\mathbb{R}$ mit $\sum_{i=0}^{r}\beta_i=\sum_{i=0}^{r}\gamma_i=1$

$$\Rightarrow 0=\sum_{i=0}^{r}\beta_i w_i-\sum_{i=0}^{r}\gamma_i w_i=\sum_{i=0}^{r}(\beta_i-\gamma_i)w_i=$$
$$=\sum_{i=0}^{r}(\beta_i-\gamma_i)w_i-\sum_{i=0}^{r}(\beta_i-\gamma_i)w_0=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}(\beta_i-\gamma_i)(w_i-w_0)$$

$w_1-w_0,\dots,w_r-w_0$ linear unabhängig $\Rightarrow \beta_i-\gamma_i=0$ für $i=1,\dots,r$

$$\Rightarrow \beta_0=1-\sum_{i=1}^{r}\beta_i=1-\sum_{i=1}^{r}\gamma_i=\gamma_0\Rightarrow \text{Behauptung}$$

b) $\Rightarrow$ a)
Annahme: Es gilt b), a) aber nicht.

$\Rightarrow w_1 - w_0, \dots, w_r - w_0$ linear abhängig

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r$ nicht alle $= 0$, so dass

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (w_i - w_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i - \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \right) w_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \right) w_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i = w_0$$

ist Affinkombination $w_0, \dots, w_r$

b) $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ ↯ $\square$

Wiederholung: Eine **affine Abbildung** von $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = Cx + t$, $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}^n$ (Translationsvektor).
Die Menge der affinen Abbildungen bildet eine Gruppe:
- sind $F_1(x) = C_1 x + t_1$, $F_2(x) = C_2 x + t_2$ affin
  $\Rightarrow F_1 \circ F_2(x) = C_1 C_2 x + (C_1 t_2 + t_1)$ affin
- Einselement $C = \mathbb{1}_n$, $t = 0 \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$
- Inverses Element $F^{-1}(x) = C^{-1}x - C^{-1}t$

Affine Abbildungen werden auch **Affinitäten** genannt.

Eigenschaften von Affinitäten

Sei $F(x) = Cx + t$ affin.

- sind $w_0, \dots, w_r$ affin unabhängig $\Rightarrow F(w_0), \dots, F(w_r)$ affin unabhängig
- Ist $\sum_{i=0}^{r} \beta_i w_i$, $\sum_{i=0}^{r} \beta_i = 1$ affine Kombination von $w_0, \dots, w_r$
  $\Rightarrow F\left(\sum_{i=0}^{r} \beta_i w_i \right)$ affine Kombination von $F(w_0), \dots, F(w_r)$
- Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ affin $\Rightarrow F(A)$ affin
- Ist A affine Hülle von $w_0, \dots, w_r \Rightarrow F(A)$ affine Hülle von $F(w_0), \dots, F(w_r)$
- $\dim A = \dim F(A)$