Vergleich: Linear – Affin

	Linear	Affin
Raum	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{A}^n$ (Nullpunkt nicht festgelegt)
Elemente	Vektoren	Punkte (Endpunkt von Vektoren)
Unterräume	Lineare UR=UVR	Affine Unterräume
Darstellungs-möglichkeiten der Unterräume	§ Lösungsmenge homogener linearer GLS § span M, $M \subset \mathbb{R}^n$ § Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$	§ Lösungsmenge inhomogener linearer GLS § Affine Hüllen von M § Affinkombinationen $\sum_{i=0}^{r} \beta_i w_i$, $\sum \beta_i = 1$
Automorphismen	Lineare Abbildungen $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $x \mapsto Cx$ $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$	Affinitäten $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $x \mapsto Cx$ $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}^n$

§ 3 Konvexe Mengen

$\mathbb{R}^n$, Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$

a, b spannen eine Gerade G auf.

$G =$ affine Hülle von a und b

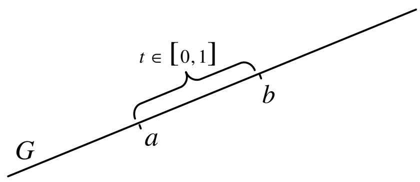
$G = \{sa + tb \mid s + t = 1\}$, $s = 1 - t$

$G = \{(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$

$t = 0 \Rightarrow 1$

$t = 1 \Rightarrow b$

$t \in [0,1]$ Punkte zwischen a und b = Strecke $\overline{ab} = [a,b]$

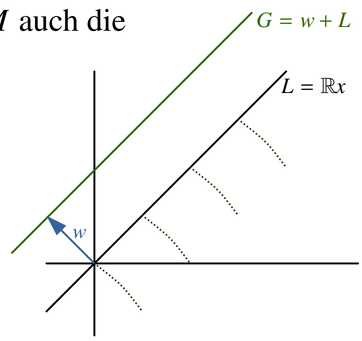


Bezeichnungen:

$[a,b] = \overline{ab} = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für je 2 Punkte $a, b \in M$ auch die Strecke $[a,b] \subset M$

Beispiel: Lineare und affine Unterräume sind konvex
L konvex, G konvex
Die zu L und G gehörenden Halbebenen sind konvex.



Eine Konvexkombination von Vektoren $v_0,\dots,v_r$ ist eine linear (affin) Kombination der Form:

$$\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_r v_r,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \sum \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 1$$

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Die konvexe Hülle von M ist die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen von M:

$$\operatorname{conv}(M))\{t_0 m_0 + \dots + t_r m_r \mid m_0,\dots,m_r \in M,\ t_0,\dots,t_r \in \mathbb{R},\ t_0 + \dots t_r = 1\}$$

$$\operatorname{conv}(M) \subset \text{Affine Hülle von } M \subset \operatorname{span} M$$

Beispiel: $\operatorname{conv}(a,b) = [a,b]$

Satz 1: Für eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

b) K ist konvex
c) Für endlich viele Punkte von K ist auch jede Konvexkombination dieser Punkte in K
d) $K = \operatorname{conv}(K)$

Beweis: b) $\Leftrightarrow$ c) Definition von konvexer Hülle

a) $\Rightarrow$ b) K konvex, sei $x_0,\dots,x_r \in K$ und $x = \sum_{i=0}^{r} t_i x_i$ eine Konvexkombination,

also $t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1$.

Zu zeigen: $x \in K$

Da K konvex $[x_0, x_1] \subset K \Rightarrow y_1 := \frac{t_0}{t_0+t_1} x_0 + \frac{t_1}{t_0+t_1} x_1 \in [x_0,x_1] \subset K$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y_2 &= \frac{t_0+t_1}{t_0+t_1+t_2} y_1 + \frac{t_2}{t_0+t_1+t_2} x_2 \in [y_1, x_2] \subset K \\
&= \frac{t_0}{t_0+t_1+t_2} x_0 + \frac{t_1}{t_0+t_1+t_2} x_1 + \frac{t_2}{t_0+t_1+t_2} x_2 \\
&\vdots \\
y_r &= \frac{t_0}{t_0+\dots+t_r} x_0 + \dots + \frac{t_r}{t_0+\dots+t_r} x_r \in [y_{r-1}, x_r] \subset K \\
&= t_0 x_0 + \dots + t_r x_r = x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in K$

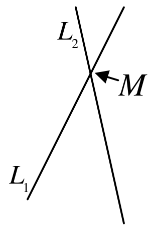
$\Rightarrow$ b)

b) $\Rightarrow$ a) Wenn jede Konvexkombination von endlich vielen Punkten von K in K liegt, so auch jede Konvexkombination von zwei Punkten $\Rightarrow$ a)

Bemerkung: a) Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(M)$ ist die kleinste konvexe Menge die M enthält.

b) $\operatorname{conv}(M) \subset$ Affine Hülle von M.

Beispiel: $\mathbb{R}^2$ zwei affine Geraden
$L_1 \not\parallel L_2$
Sei M konvex
$M \subset L_1,\ M \subset L_2$
$\Rightarrow M = L_1 \cap L_2$



Allgemein:

Lemma 2: Seien $H_1,\dots,H_k$ affine Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$
(also $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle = b_i\}$ mit $a_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}$)
Ist $M \subset H_i$ für $i = 1,\dots,k$, so ist $M \subset \bigcap_{i=1}^{k} H_i$

§ 4 Polyeder

Affine Hyperebene $H = v + \mathbb{U} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = b\}$, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ Hyperebene, $v \in \mathbb{R}^n$

H teilt $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume / Halbebenen

$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \geq b\}$ abgeschlossene Halbebene

$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle > b\}$ offene Halbebene

$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq b\}$ abgeschlossene Halbebene

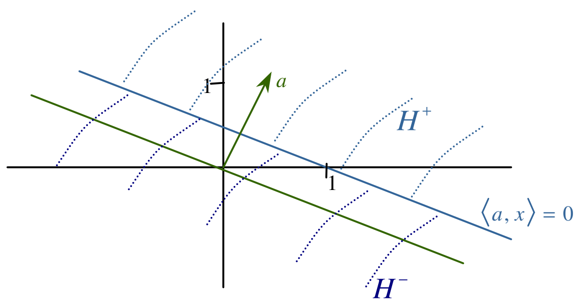
$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle < b\}$ offene Halbebene

Beispiel: $a = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ b = 1$

$e_1 \in H = \{x \mid \langle a, x\rangle = 1\}$

denn: $\langle a, e_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 1$

$H^+ = \{\langle a, x\rangle \geq 1\} \ni 2e_1$



Proposition 1: Abgeschlossene und offene Halbebenen sind konvex.

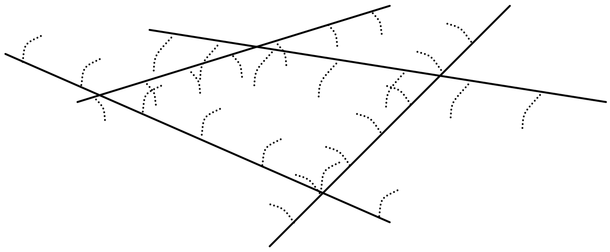
Beweis: $x, y \in H^+ = \{\langle a, x\rangle \underset{(=)}{>} b\}$

Zu zeigen: $[x, y] \subset H^+$

$[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$

$\Rightarrow \langle a, (1-t)x + ty\rangle = (1-t)\langle a, x\rangle + t\langle a, y\rangle \geq (1-t)b + tb = b$ $\square$

Definition: Ein **Polyeder** ist der **Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbebenen** Es gibt **beschränkte** und **unbeschränkte Polyeder**.



Folgerung: Ein **Polyeder** ist die **Lösungsmengen** endlich vieler **linearer Ungleichungen**.

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \langle a_1, x \rangle \geq b_1, \ldots, \langle a_k, x \rangle \geq b_k \right\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} \left\{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \right\} \qquad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n,\ b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}\ (\text{Œ}"\geq")$$

Korollar 2: Ein Polyeder ist konvex.

Beweis: Durchschnitte konvexer Mengen sind konvex. □

Proposition 3: Der Durchschnitt einer Polyeders mit einem affinem Unterraum ist wieder ein (durchschnittener) Polyeder.

Beweis: P Polyeder, $\mathbb{U}$ affiner Unterraum

$$\mathbb{U} = \bigcap_{i=1}^{k} H_i, \quad H_i = \left\{ \langle a_i, x \rangle = b_i \right\}$$

$$H_i = H_i^+ \cap H_i^-$$

$$\Rightarrow P \cap \mathbb{U} \quad \mathbb{P} \cap \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+ \cap H_i^-$$ ist ein Polyeder nach Definition. □

Definition: Die Dimension eines Polyeders P ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der P enthält.