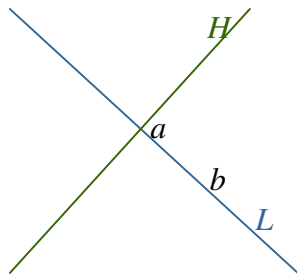


Definition: Die **Dimension eines Polyeders** P ist die **Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der P enthält**.

Bemerkung: Dieser kleinste affine Unterraum ist genau die affine Hülle von P .

Beispiel: $a, b \in \mathbb{R}^n$, $[a, b]$ = Strecke zwischen a und b .

Behauptung: $[a, b]$ ist Polyeder der Dimension 1.



L = Gerade durch a, b = affiner Unterraum der Dimension 1

$H = L^\perp$, $a + H$, $b + H$,

Hyperebene durch a , bzw. b senkrecht zu $[a, b]$

H_a^+ = Halonebene an $a + H$ mit $[a, b] \subset H_a^+$

H_b^+ = Halonebene an $b + H$ mit $[a, b] \subset H_b^+$

$\Rightarrow [a, b] = H_a^+ \cap H_b^+ \cap L$ ist also ein Polyeder

Beispiel: Standardbasis e_1, \dots, e_n von \mathbb{R}^n

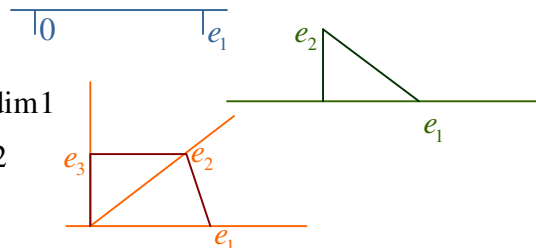
$\text{conv}(0) = \{0\}$, Polyeder der dim 0

$\text{conv}(0, e_1) = [0, e_1]$, Polyeder der dim 1

$\text{conv}(0, e_1, e_2) = \Delta(0, e_1, e_2)$, dim = 2

$\text{conv}(0, e_1, e_2, e_3) \Rightarrow \text{dim} = 3$

$\text{conv}(0, e_1, \dots, e_n)$ heißt **Standard-Simplex** der Dimension n .



Beobachtung: $0, e_1, \dots, e_n$ sind affin unabhängig

Definition: Seien p_0, \dots, p_k $(k+1)$ -affin unabhängige Punkte im \mathbb{R}^n .

Die konvexe Hülle $\text{conv}(p_0, p_1, \dots, p_k)$ heißt **Simplex** der Dimension k .

Satz 4: Der Simplex $S = \text{conv}(p_0, \dots, p_k)$ ist ein Polyeder der Dimension k .

Beweis: z.Z.: S ist Durchschnitt von Halbebenen

p_0, \dots, p_k affin unabhängig \Rightarrow Affine Hülle $\simeq \mathbb{R}^k$

\mathbb{C} wir arbeiten in \mathbb{R}^k ($n = k$)

Für $i \in \{0, \dots, k\}$

$\underbrace{p_0, \dots, p_i, \dots, p_k}_{\checkmark}$ sind k affin unabhängige Punkte, $p_i \notin H_i$
spannen eine affine Hyperebene H_i auf

$\Rightarrow p_i$ liegt auf einer der beiden Halbebenen zu H_i , diese sei H_i^+ , also $p_i \in H_i^+$.

Sei $H_i = \{\langle a_i, x \rangle = b_i\}$
 $H_i^+ = \{\langle a_i, x \rangle \geq b_i\}$ mit $a_i \in \mathbb{R}^k, b_i \in \mathbb{R}$

$$x = \sum_{j=0}^k \alpha_j p_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \sum \alpha_j = 1$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

Vorlesung 15

Donnerstag, 17. Juni 2004

$$\begin{aligned}
 p_i \in H_i^+ \setminus H_i &\Rightarrow \langle a_i, p_i \rangle > b_i \\
 p_j, j \neq i &\Rightarrow \langle a_i, p_j \rangle = b_i \\
 \Rightarrow p_0, p_1, \dots, p_i, \dots, p_k \in H_i^+ &\quad \forall i = 0, \dots, k \\
 p_0, \dots, p_i, \dots, p_k \in \bigcap_{j=0}^k H_j^+ &=: P \text{ (Polyeder)} \\
 \Rightarrow S = \text{conv}(p_0, \dots, p_k) &\subset P
 \end{aligned}$$

z.Z.: $P \subset S$

Sei $x \in P \subset \mathbb{R}^k$ affine Hüllen von p_0, \dots, p_k

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{j=0}^k \alpha_j p_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \sum \alpha_j = 1 \\
 x \in P &= \bigcap H_j^+ \\
 \Rightarrow b_i \leq \langle a_i, x \rangle &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \langle a_i, p_j \rangle = \alpha_i \underbrace{\langle a_i, p_i \rangle}_{> b_i} + \sum_{j=0, j \neq i}^k \alpha_j \underbrace{\langle a_i, p_j \rangle}_{= b_i} \\
 &\stackrel{\text{mit } \varepsilon > 0}{=} \alpha_i (b_i + \varepsilon) + \sum_{j=0}^k \alpha_j b_i \\
 &= \alpha_i \varepsilon + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \right)}_{=1} b_i \\
 &= \alpha_i \varepsilon + b_i \\
 \Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{\alpha_i \varepsilon}_{> 0} &\Rightarrow \alpha_i \geq 0 \\
 \Rightarrow \alpha &= \sum \alpha_j p_j \text{ ist konvexe Kombination} \Rightarrow x \in S \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel: $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$

$\text{conv}(p_0, p_1) = [p_0, p_1] = \text{Strecke}$

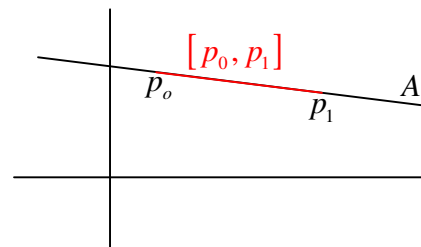
$$\bigcap_{A = \text{Affine Hüllen von } \{p_0, p_1\}} \{(1-t)p_0 + t \cdot p_1 \mid t \in [0, 1]\} = \{(1-t)p_0 + t \cdot p_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$\dim[p_0, p_1] = \dim A = 1$

$$I: \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1-t)p_0 + t \cdot p_1$$

$$\Rightarrow \text{im } I = A, \quad I([0, 1]) = [p_0, p_1]$$

$$I: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{!}} A \text{ bijektiv}$$



Allgemein: $P \subset \mathbb{R}^n$ Polyeder, $\dim P = d < n$

$A = \text{Affine Hüllen von } P, \dim A = d$

$$\exists \text{ Bijektion: } I: \mathbb{R}^d \xrightarrow{\text{!}} A \subset \mathbb{R}^n$$

$$I^{-1}(P) \text{ ist Polyeder in } \mathbb{R}^d$$

Mit anderen Worten: wir identifizieren $A = \mathbb{R}^d$ und können
so $P \subset \mathbb{R}^d$ mit $\dim P = \dim \mathbb{R}^d = d$ erreichen.

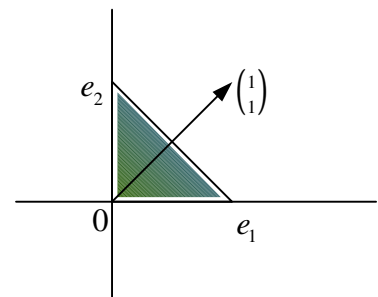
Satz 5: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subset \mathbb{R}^n$
 Dann sind äquivalent:
 a) $\dim P = n$
 b) $\bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle > b_i \} \neq \emptyset$

Beispiel: $P = \text{conv}(0, e_1, e_2)$

Als Teilmenge von \mathbb{R}^2

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq -1 \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 > 0, x_2 > 0, -x_1 - x_2 > -1 \right\} \text{ ist invers}$$



Als Teilmenge des \mathbb{R}^3

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq -1, x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq -1, x_3 \geq 0, x_3 \leq 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 > 0, x_2 > 0, -x_1 - x_2 \geq -1, x_3 > 0, x_3 < 0 \right\} \neq \emptyset$$

Beweis (Satz 5):

a) \Rightarrow b) $\dim P = n \Rightarrow P$ liegt in keiner Hyperebene

Annahme: $\{ x \mid \langle a_i, x \rangle > b_i, i = 1, \dots, k \} = \emptyset$

$\Rightarrow \exists i_0$, so dass $P \subset \{ x \mid \langle a_{i_0}, x \rangle = b_{i_0} \}$ ⚡

b) \Rightarrow a) Wenn $\{ x \mid \langle a_i, x \rangle > b_i, i = 1, \dots, k \} = \emptyset$

$\Rightarrow P$ liegt in Hyperebene

$\Rightarrow \dim P \leq n - 1$ ⚡

Ist $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder der Dimension n , so heißt die Menge

$P^0 := \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle > b_i \}$ das **Innere von P** .

Die Menge $\partial P = P \setminus P^0$ heißt **Rand von P** .

$$\Rightarrow \partial P = \{ x \in P \mid \langle a_i, x \rangle = b_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, k\} \}$$

Beispiel: $P = \text{conv}(0, e_1, e_2)$

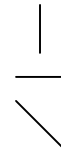
$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq -1 \right\}$$

1-dimensionale Seiten von $P =$ Kanten

$$\{ x_1 = 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq -1 \}$$

$$\{ x_1 \geq 0, x_2 = 0, -x_1 - x_2 \geq -1 \}$$

$$\{ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 = -1 \}$$



0-dimensionale Seiten = Ecken

$$\left\{ x_1 = 0, x_2 = 0, \underbrace{-x_1 - x_2 \geq -1}_{\text{überflüssig}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

andere Ecken: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definition: Sei $P = \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i, i = 1, \dots, k \}$ ein Polyeder und $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, k\}$ eine beliebige Teilmenge $\neq \emptyset$.

Dann heißt das Polyeder $P_1 \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j}, j = 1, \dots, r \}$ eine **Seite von P** ,

1-dimensionale Seiten heißen auch **Kanten**.

0-dimensionale Seiten heißen auch **Ecken**.

Bemerkung: Sei P ein Polyeder, und S eine Seite von P .

Dann ist jede Seite S' von S auch Seite von P .

Satz 6: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

Ist die Dimension der Seite $S = P \cap \{ \langle a_{i_0}, x \rangle = b_{i_0} \} < n - 1$,

so gilt schon $P = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \}$