

Satz 6: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle > b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

Ist die Dimension der Seite $S = P \cap \{ \langle a_{i_0}, x \rangle = b_{i_0} \} < n-1$, so gilt:

$$P = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \}$$

Beweis: $\exists i_0 = 1$

Sei $Q = \bigcap_{i=2}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \supset P$

Zu zeigen: $P = Q$

Annahme: $P \neq Q \Rightarrow \exists q \in Q \setminus P$

$$q \in Q = \bigcap_{i=2}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \}$$

$$q \notin P = Q \cap \{ \langle a_1, x \rangle \geq b_1 \}$$

$$q \notin S = Q \cap \{ \langle a_1, x \rangle = b_1 \}$$

$$\Rightarrow \langle a_1, q \rangle < b_1$$

Sei $A =$ affine Hülle von q und S

$$\dim A \leq \underbrace{\dim S}_{< n-1} + 1 < n = \dim P$$

$$\Rightarrow \exists p \in P \setminus A \Rightarrow \langle a_1, p \rangle > b_1$$

Strecke $[p, q] = \text{conv} \{ p, q \} \subset Q$, weil $\langle a_1, q \rangle < b_1$ und $\langle a_1, p \rangle > b_1$
schneidet $[p, q]$ die Hyperebene $\{ \langle a_1, x \rangle = b_1 \}$

$$\text{Sei } \{ r \} = [p, q] \cap \{ \langle a_1, x \rangle = b_1 \} \subset Q \cap \{ \langle a_1, x \rangle = b_1 \} = S$$

$$\Rightarrow r \in S$$

Andererseits:

$$\left. \begin{array}{l} q \notin P, p \in P \\ q \in A, p \notin A \end{array} \right\} [p, q] \cap A = \{ q \}$$

Aber

$$\left. \begin{array}{l} q \in Q \setminus P \Rightarrow \langle a_1, q \rangle < b_1 \\ \text{und } \langle a_1, r \rangle = b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r \neq q$$

$$\Rightarrow r \notin A \Rightarrow r \notin S \quad \text{⚡}$$

Satz 7: Sei $P = \bigcap_{i=1}^r \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $S = P \cap \bigcap_{j=1}^s \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j} \}$

(mit $\{ i_1, \dots, i_s \} \subset \{ 1, \dots, r \}$) eine Seite. Dann gilt:

$$\dim S = n - \text{Rg}(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$$

Beweis: \exists Annahme: S ist maximal

$$\text{d.h. } S \cap \{ \langle a_k, x \rangle = b_k \} \subsetneq S \text{ f\u00fcr } k \notin \{i_1, \dots, i_j\}$$

Sei $A = \bigcap_{j=1}^s \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j} \} =$ affiner Unterraum mit zugeh\u00f6rigem UVR:

$$\bigcap_{U=1}^s \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = 0 \}$$

$$\Rightarrow \dim A = n - \text{Rg}(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$$

$S \subset A$ und S liegt in keiner weiteren affinen Hyperebene

$$\Rightarrow \dim S = \dim A$$

Satz 8: Es sei $P \subset \mathbb{R}^n, H \subset \mathbb{R}^n$ affine Hyperebenen und q eine Ecke von $Q = P \cap H$.
 Dann ist q entweder Ecke von P oder
 Durchschnitt von H mit einer Kante von P .

Satz 9: Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

- a) wenn $P \neq \mathbb{R}^n$, so besitzt P Seiten der Dimension $n-1$
- b) Jede d -dimensionale Seite von P ist schon Seite einer $(d+1)$ -dimensionalen Seite von P .
- c) Jede $(n-2)$ -dimensionale Seite geh\u00f6rt zu genau 2 $(n-1)$ -dimensionale Seiten.

Beweis: Sei $P = \bigcap_{i=1}^r \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \}$ mit r minimal.

a) $P \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow r \geq 1$

$$\dim P \cap \{ \langle a_i, x \rangle = b_i \} = n - 1$$

b) Sei $S = P \cap \bigcap_{j=1}^s \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j} \}$ mit $\dim S = d = n - \underbrace{\text{Rg}(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})}_{n-d}$

d.h. a_{i_1}, \dots, a_{i_s} spannen UVR der Dimension $n-d$ auf.

Basisauswahlsatz \Rightarrow Es gibt darunter $n-d$ linear unabhängige Vektoren

\exists Seien $a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-d-1}}$ linear unabhängig

$$\Rightarrow S' = P \cap \bigcap_{j=1}^{n-d-1} \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j} \} \text{ ist Seite von } P$$

$$\text{der Dimension } \dim S' = n - (n - d - 1) = d + 1$$

Nach Konstruktion $S \subset S'$ Seite \Rightarrow Behauptung

c) Sei S eine Seite von P der Dimension $n-2$.

Dann gibt es 2 Hyperebenen, die S ausschneiden.

$$\exists S = P \cap \{ \langle a_1, x \rangle = b_1 \} \cap \{ \langle a_2, x \rangle = b_2 \}$$

Insbesondere gilt:

$$\text{Sei } S_i = P \cap \{ \langle a_i, x \rangle = b_i \} \quad i=1,2$$

$$\Rightarrow \dim S_i = n-1 \text{ und } S = S_1 \cap S_2$$

Zu zeigen: Es gibt keine weitere $(n-1)$ -dimensionale Seite, die S als Seite enthält.

$$\text{Annahme: } S \subset S_3 = P \cap \{ \langle a_3, x \rangle = b_3 \}$$

$$\Rightarrow S \subset S_1 \cap S_2 \cap S_3 \subset S_1 \cap S_2 = S$$

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = P \cap \bigcap_{i=1}^3 \{ \langle a_i, x \rangle = b_i \}$$

$$\Rightarrow \dim \text{span} \{ a_1, a_2, a_3 \} = \text{Rg} \{ a_1, a_2, a_3 \} = 2$$

$$\Rightarrow a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \quad \alpha_1, \alpha_2 \neq 0$$

Seien $H_i = \{ \langle a_i, x \rangle = b_i \} \quad i=1,2,3$ Hyperebenen

$$\Rightarrow S_i = P \cap H_i$$

$$x \in \underbrace{H_1 \cap H_2}_{S_1 \cap S_2 = S} \cap P \Rightarrow x \in H_3 \cap P = S_3$$

$$\langle a_1, x \rangle = b_1, \quad \langle a_2, x \rangle = b_2$$

$$\Rightarrow b_3 = \langle a_3, x \rangle = \alpha_1 \langle a_1, x \rangle + \alpha_2 \langle a_2, x \rangle = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

Fall $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$:

$$\text{Für } x \in P \Rightarrow \langle a_3, x \rangle = \underbrace{\alpha_1 \langle a_1, x \rangle}_{\geq b_1} + \underbrace{\alpha_2 \langle a_2, x \rangle}_{\geq b_2} \geq \underbrace{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}_{=b_3}$$

\Rightarrow Ungleichung $\langle a_3, x \rangle \geq b_3$ überflüssig

Fall $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$:

$$x \in P \Rightarrow \alpha_2 \langle a_2, x \rangle = \langle a_3, x \rangle - \alpha_1 \langle a_1, x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle a_2, x \rangle = \underbrace{\frac{1}{\alpha_2}}_{>0} \underbrace{\langle a_3, x \rangle}_{\geq b_3} - \underbrace{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}_{>0} \underbrace{\langle a_1, x \rangle}_{\geq b_1}$$

$$\Rightarrow \geq \frac{1}{\alpha_2} b_3 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} b_1 = b_2$$

\Rightarrow wieder eine Ungleichung überflüssig

Fall $\alpha_1, \alpha_2 > 0$:

$$\langle a_3, x \rangle = \underbrace{\alpha_1}_{<0} \underbrace{\langle a_1, x \rangle}_{\geq b_1} + \underbrace{\alpha_2}_{<0} \underbrace{\langle a_2, x \rangle}_{\geq b_2} \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = b_3 \quad \color{red}{\blacksquare} \quad \square$$

Satz 10: Für ein Polyeder $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in P$ sind äquivalent:

- a) p ist Ecke von P
- b) Es gibt $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, so dass a_{i_1}, \dots, a_{i_n} linear unabhängig sind und $\{p\} = \bigcap_{j=1}^n \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j} \}$
- c) Es gibt einen Halbraum $\{ \langle a, x \rangle \leq b \}$, der P nur in p schneidet
- d) Sind $q_0 \neq q_1$ Punkte in P und $p = (tq_0 + (1-t)q_1) \in [q_0, q_1]$, dann gilt: $t = 0$ oder $t = 1$, d.h. $p = q_0$ oder $p = q_1$

Beweis: a) \Leftrightarrow b) folgt aus Satz 7, da Ecken Seiten der Dimension 0 sind

a) \Leftrightarrow c) $\{p\} = P \cap \bigcap_{i \in J} \{ \langle a_i, x \rangle = b_i \} \quad J \subset \{1, \dots, k\}$

Dabei sei J maximal gewählt

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} \setminus J \text{ gilt: } \langle a_i, p \rangle > b_i$$

Sei $a = \sum_{j \in J} a_j, \quad b = \sum_{j \in J} b_j$

$$\Rightarrow \langle a, p \rangle = \sum_{j \in J} \langle a_j, p \rangle = \sum_{j \in J} b_j = b$$

für $x \in P \setminus p: \quad \langle a, x \rangle = \sum_{j \in J} \underbrace{\langle a_j, x \rangle}_{\geq b_j} \geq \sum_{j \in J} b_j = b$

$$\Rightarrow \{ \langle a, x \rangle \leq b \} \cap P = \{p\}$$

c) \Leftrightarrow d) Sei $q_0, q_1 \in P$ mit $p = tq_0 + (1-t)q_1 \in [q_0, q_1]$

$$\Rightarrow [q_0, q_1] \subseteq P \subset \{ \langle a, x \rangle \geq b \}$$

wenn $p \neq q_i \Rightarrow \langle a, q_i \rangle > b$

$$\Rightarrow \langle a, p \rangle = t \langle a, q_0 \rangle + (1-t) \langle a, q_1 \rangle > tb + (1-t)b = b \quad \text{⚡ zu } \langle a, p \rangle = b$$

d) \Leftrightarrow b) Sei $J \subset \{1, \dots, k\}$

$$\langle a_j, p \rangle = \begin{cases} = b_j & j \in J \\ > b_j & j \notin J \end{cases}$$

Sei $A = \{x \mid \langle a_j, x \rangle = b_j, j \in J\}$ affiner Unterraum von \mathbb{R}^n mit $p \in A$

Annahme: $\dim A > 0$

$\Rightarrow A$ enthält ein Gerade L durch p

Für $i \notin J$ gilt: $\langle a_i, p \rangle > b_i$

$\Rightarrow \exists$ Strecke $p \in [q_0, q_1] \subset L, \quad p \neq q_0, q_1$

mit $\langle a_i, x \rangle > b_i \quad \forall x \in [q_0, q_1], \quad \forall i \notin J$

$\Rightarrow [q_0, q_1] \in P \quad \text{⚡}$

$\Rightarrow \dim A = 0 \quad \square$