Korollar 11: Jedes Polyeder hat nur endlich viele Ecken.

Beweis: Endlich viele lineare Ungleichungen ($\simeq$ Halbebenen) definieren ein Polyeder.

Satz 12: Sei $\varnothing \neq P = \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle a_i, x\rangle \geq b_i\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Dann sind äquivalent:

a) $\mathrm{Rg}\{a_1, \ldots, a_k\} = n$

b) P besitzt Seiten jeder Dimension $d < \dim P$

Beispiel: $\mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}^2,\ b \in \mathbb{R} \Rightarrow P = \{\langle a, x\rangle \geq b\}$ ist Halbebene, also Polyeder der Dimension 2, P hat eine Seite der Dimension 1: $\{\langle a, x\rangle = b\}$. P hat keine Ecken.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) Œ $\dim P = n$

Jede Seite von P ist von der Form:

$$S_j = P \cap \bigcap_{j \in J} \{\langle a_j, x\rangle = b_j\},\ J \subset \{1, \ldots, k\}$$

$$\dim S_j = n - \mathrm{Rg}\{a_j \mid j \in J\} = d$$

Nach dem Basisauswahlsatz gibt es zu jedem $0 \leq d \leq n$ eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathrm{Rg}\{a_j \mid j \in J\} = n - d$.

§ 5 Beschränkte Polyeder

Möglichkeiten für ein Polyeder P.

1) $P = \varnothing$
2) P beschränkt, $\forall R > 0\ \ \exists x \in P$ mit $\|x\| > R$
3) P beschränkt, d.h. $\exists R > 0,\ \ \|x\| < R\ \ \forall x \in P$

Bezeichnungen:

Gerade durch $p, q = \{p + t(q-p) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Strecke zwischen p und $q = \{p + t(q-p) \mid t \in [0,1]\}$

Strahl aus p (durch q) $= \{p + t(q-p) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$

Satz 1: Für ein Polyeder $P = \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle a_i, x\rangle \geq b_i\} \neq \emptyset$, $P \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) P ist unbeschränkt
b) Es gibt ein $p \in P$ und einen Strahl an p, der ganz in P liegt
c) Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle a_i, v\rangle > 0 \quad \forall i = 1,\ldots,k$
d) An jedem Punkt $p \in P$ gibt es einen Strahl, der ganz in P liegt

Beweis: a)$\Rightarrow$b) P unbeschränkt, d.h. für jedes $r > 0$ gibt es ein $x \in P$ mit $\|x\| > r$

Œ $P \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow \partial P \neq \emptyset$

Annahme: An $p \in P$ liegt kein Strahl, der ganz in P liegt.
(translatiere alles um $-p$), $p \to 0$

$\Rightarrow 0 \in P$ und an 0 gibt es keinen Strahl, der ganz in P liegt. Für jedes $v \in \mathbb{R}$ betrachte die Gerade $L_v = \mathbb{R}v$

$\Rightarrow L_v \cap P = \text{Strecke} = [t_0 v, t_1 v]$

$t_0 v,\ t_1 v \in \partial P$

wäre ∂P beschränkt $\Rightarrow R > 0$ mit

$\|x\| < R,\ \forall x \in \partial P$, insbesondere $\|x\| < R,\ \forall x \in [t_0 v, t_1 v]$

Aber P unbeschränkt $\Rightarrow \exists q \in P,\ \|q\| > R$

$\Rightarrow [0,q] \subset L_q \cap P$ aber $\|q\| > R$

$\Rightarrow \partial P$ unbeschränkt $\Rightarrow \exists$ unbeschränkte Seite

Sei S unbeschränkte Seite der kleinsten Dimension

Falls $\dim S = 1 \quad \Rightarrow \quad S$ Strahl oder Gerade
$\Rightarrow$ Behauptung b)

Falls $\dim S > 1 \quad \Rightarrow \quad S$ ist unbeschränktes Polyeder der Dimension ≥ 2, so dass alle Seiten von S beschränkt sind.

$\Rightarrow \partial S = \emptyset \quad \Rightarrow S \simeq \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow S$ enthält einen Strahl
$\Rightarrow$ Behauptung b)

b)$\Rightarrow$c) P enthalte den Strahl $p + \mathbb{R}_{\geq 0} v = \{p + tv \mid t > 0\} \subset P$

$\Rightarrow \langle a_i, p + tv\rangle \geq b_i, \quad \forall i,\ t \geq 0$

$\underbrace{\langle a_i, p\rangle}_{\geq b_i} + t\langle a_i, v\rangle \geq b_i \quad \forall i,\ t \geq 0$

$\Rightarrow \langle a_i, v\rangle \geq 0 \quad \forall i \qquad \Rightarrow$ c)

c)$\Rightarrow$d) Sei $p \in P$ und v wie in c)

$\Rightarrow \langle a_i, p + tv\rangle = \underbrace{\langle a_i, p\rangle}_{\geq b_i} + t\underbrace{\langle a_i, v\rangle}_{\geq 0} \geq b_i$ für $\forall i,\ t \geq 0$

$\Rightarrow p + \mathbb{R}_{\geq 0} v \subset P \quad \Rightarrow$ d)

d)$\Rightarrow$a) Klar

Satz 2: Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $H = \{\langle a, x\rangle = b\}$ eine Hyperebene.
Wenn $P \cap H \neq \emptyset$ beschränkt, so sind auch die dazu parallele Schritte
$$P_c = P \cap \{\langle a, x\rangle = c \mid c \in \mathbb{R}\}$$
beschränkt (möglicherweise leer).

Beweis: Sei $P = \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle a_i, x\rangle \geq b_i\}$

Annahme: $\exists c$ mit $P_c = P \cap \{\langle a, x\rangle = c\}$ ist beschränkt

$\Rightarrow P_c$ enthält einen Strahl $p + \mathbb{R}_{\geq 0} v$

$\Rightarrow \langle a_i, v\rangle \geq 0,\ i = 1, \ldots, k$ und $\langle a, v\rangle \geq 0, \langle a, v\rangle \leq 0$

$\Rightarrow \langle a, v\rangle = 0$

Sei $q \in H \cap P = P_b$ und $t \geq 0$

$\Rightarrow \langle a, q + tv\rangle = \langle a, q\rangle + t\underbrace{\langle a, v\rangle}_{=0} = b$, weil $q \in P_0$

und $\langle a_i, q + tv\rangle = \langle a_i, q\rangle + t\langle a_i, v\rangle \geq b_i \quad \forall i,\ \forall t \geq 0$

$\Rightarrow q + tv \in P \cap H = P_b \quad \forall t \geq 0$ ↯ □

Satz 3:
a) Jedes beschränkte Polyeder der Dimension n hat mindestens $n+1$ Seiten der Dimension n-1
b) Jedes beschränkte Polyeder hat Ecken

Beweis: a) Sei $P = \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle a_i, x\rangle \geq b_i\}$ mit # Halbebenen minimal

$\Rightarrow \forall i: \quad P \cap \{\langle a_i, x\rangle = b_i\}$ ist (n-1)-dimensionale Seite

$\Rightarrow \exists k$ (n-1)-dimensionale Seite

wenn $k \geq n+1 \Rightarrow$ Behauptung

wenn $k \leq n$

Es genügt z.Z. P unbeschränkt

Es sei $U = \{\langle a_i, x\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, k\}$ UVR von $\mathbb{R}^n$

$$\dim U = n - \underbrace{\mathrm{Rg}\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}}_{\leq k-1} \geq n - \underbrace{k}_{\leq n} + 1 \geq 1$$

Sei $v \in U$

$\Rightarrow \langle a_k, v\rangle \geq 0$ oder $\langle a_k, v\rangle \leq 0$

$\Rightarrow v$ oder $-v$ erfüllt Bedingungen c) aus Satz 1

$\Rightarrow P$ unbeschränkt

b) Induktion über die Dimension □