

Satz 4: Ein beschränktes Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Ecken.

Beweis: P ein beschränktes Polyeder, mit Ecken E_1, \dots, E_s

P konvex, $E_1, \dots, E_s \in P \rightarrow \text{conv}(E_1, \dots, E_s) \subseteq P$

Zu zeigen: $P \subseteq \text{conv}(E_1, \dots, E_s)$

Induktion über $\dim P$:

$\dim P = 0$

$\dim P = n > 0, \exists P \subset \mathbb{R}^n$

Fall 1: $x \in \partial P \Rightarrow \exists \text{Seite } P' \subset P, x \in P'$

P' beschränkt mit $\dim P' < \dim P$

$\Rightarrow P' = \text{konvexe Hülle seiner Ecken}$

Ecken von $P' \subset$ Ecken von P

$\Rightarrow x \in \text{conv}\{\text{Ecken von } P\} \subset \text{conv}\{E_1, \dots, E_s\}$

Fall 2: $x \in P^\circ$

Sei L Gerade durch $x, L = x + \mathbb{R}v$

$L \cap P = [x + t_0v, x + t_1v]$ Strecke

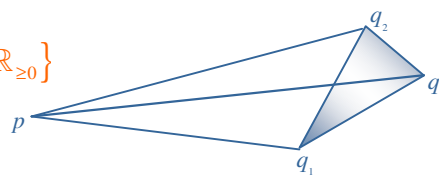
$x + t_0v, x + t_1v \in \mathbb{R} \subset \text{conv}\{E_1, \dots, E_s\}$

$\Rightarrow x \in \text{conv}\{x + t_0v, x + t_1v\} \subset \text{conv}\{E_1, \dots, E_s\}$ □

Kegel: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n$

Der Kegel über M mit Spitze p ist die Vereinigung aller Strahlen an p durch Punkte von M .

$$\text{cone}_p(M) = \bigcup_{q \in M} \{p + t(q - p) \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$



Satz 5: Für $M \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$ gilt:
 Der Kegel über konvexer Hülle von M mit Spitze p ist gleich der konvexen Hülle des Kegels über M mit Spitze p .

$$\text{cone}_p(\text{conv}(M)) = \text{conv}(\text{cone}_p(M))$$

Beweis: " $\text{cone}_p(\text{conv}(M)) \subseteq \text{conv}(\text{cone}_p(M))$ "

Sei $x \in \text{cone}_p(M) \Leftrightarrow x = p + t(q - p)$ mit $q \in \text{conv}(M), t \geq 0$

$$\Leftrightarrow q = \sum_{i=1}^k \alpha_i q_i, \quad q_i \in M$$

$$\begin{aligned}
 x &= p + t \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i q - p \right) \\
 &= p + t \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i q - \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) p \right) \\
 &= p + t \sum_{i=1}^k \alpha_i (q - p) = \sum_{i=1}^k \alpha_i p + \sum_{i=1}^k t \alpha_i (q_i - p) \\
 &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \underbrace{(p + t(q_i - p))}_{\in \text{cone}_p(M)} \in \text{conv}(\text{cone}_p(M))
 \end{aligned}$$

" $\text{cone}_p(M) \supseteq \underbrace{\text{conv}(\text{cone}_p(M))}_{\ni x}$ "

Sei $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i (p + t(q_i - p))$ mit $q_i \in M, t_i \geq 0$

$$\Rightarrow x = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) p + \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i q_i - \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i t_i \right) p, \quad \mathbb{E} \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i \neq 0 \text{ sonst } \alpha_i t_i = 0 \Rightarrow x = p$$

Sei $\sum_{i=1}^k \alpha_i t_i = t > 0$

$$x = p + \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i q_i - t p = p + t \left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i t_i}{t} q_i - p \right) \text{ mit } \frac{\alpha_i t_i}{t} \geq 0, \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i t_i}{t} = \frac{t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow x \in \text{cone}_p(\text{conv}(M)) \quad \square$$

$P \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Polyeder

p_0, \dots, p_k die Ecken von P

$\{[p_0, p_i], i = 1, \dots, k\}$ enthält insbesondere die Kanten an p_0 .

Klar: $[p_0, p_i] \subset P$

Diese Strecken definieren Strahlen an p_0 .

Satz 6: $P \subset \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^k S_i \right)$

Beweis:
$$P = \text{conv}(p_0, \dots, p_k) \subset \underbrace{\text{cone}_{p_0}(\text{conv}(p_1, \dots, p_k))}_{\parallel} \text{conv}(\underbrace{\text{cone}_{p_0}(p_1, \dots, p_k)}_{\bigcup S_i})$$

Satz 7: Satz 6 gilt auch für unbeschränkte Polyeder, $\dim \geq 1$.

§ 6 Das Optimierungsproblem

Wiederholung: Produktionsmodell in § 1
 Unternehmen „LeckerSchoki&Co“
 → Problem: Profit maximieren
 ⇒ Lineares Programm (LP)

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Nebenbedingungen} \\ = \text{Restriktionen} \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \} \text{ Vorzeichenbedingung}$$

$$\Leftrightarrow \text{Polyeder } P = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 18, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 4, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 12, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle \geq 0, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \right\rangle \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

Lineare Zielfunktion: $f(x) = c \cdot x = (30, 50) \cdot x$

Problem: Finde $x \in P$ mit $f(x)$ maximal.

Graphische Lösung: Die Ecke $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ von P tut's.

Für beschränkte Polyeder

Satz 1: Sei $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Polyeder und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear.
 Dann gibt es eine Ecke $p \in P$, in dem f das Maximum seiner Werte (in P) annimmt:

$$f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in P$$

Beweis: Seien $\{p_0, \dots, p_k\}$ die Ecken von P

$$\Rightarrow P = \text{conv}(\{p_0, \dots, p_k\})$$

$$x \in P \Rightarrow x = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

$\exists i_0$, so dass $\alpha_{i_0} > 0$

Annahme: $f(x) > f(p_i), \quad i = 0, \dots, k$

$$\Rightarrow \alpha_i f(x) \geq \alpha_i f(p_i) \quad i = 0, \dots, k \quad (\text{mit } ">" \text{ in einem Fall})$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \right) f(x) > \sum_{i=0}^k \alpha_i f(p_i)$$

$$f(x) > f\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i p_i\right) = f(x) \quad \text{⚡}$$

$$\Rightarrow \exists i(x) \text{ mit } f(x) \leq f(p_{i(x)})$$

Sei $p \in \{p_0, \dots, p_k\}$, so dass $f(p) = \max\{f(p_0), \dots, f(p_k)\}$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(p_{i(x)}) \leq f(p)$$

Die Ecke p aus Satz 1 heißt **optimale Ecke** für die Linearform f .

Satz 2: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{\langle a_i, x \rangle \geq b_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und
 $\{p\} = \bigcap_{i=1}^n \{\langle a_i, x \rangle = b_i\}$ ($n \leq k$) eine Ecke von P .
 Für Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \leq 0$ ist p optimal für die Linearform

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle a_i, x \rangle$$

Beweis:
$$f(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle a_i, p \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

Sei $x \in P$ beliebig $\Rightarrow \langle a_i, x \rangle \geq b_i \quad \forall i$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\alpha_i}_{\leq 0} \underbrace{\langle a_i, x \rangle}_{\geq b_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = f(p)$$

$\Rightarrow p$ optimal