Satz 3: Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, $p \in P$ eine Ecke und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Linearform.
Ist p nicht optimal für f, so gibt es eine Kante K an p, so dass

$$f(p) < f(q) \quad \forall q \in K \setminus p$$

Beweis: p nicht optimal für $f \Rightarrow \exists x \in P$ mit $f(x) > f(p)$

P liegt in der konvexen Hülle der von p ausgehenden Strahlung durch Kanten bei p:

$$S_i = \{p + t(p_i - p) \mid t \geq 0\} \qquad i = 1, \ldots, k$$

Schreiben x als solche Konvexkombination:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(p - t_i (p_i - p)\right) \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ t_i \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(f(p) - t_i \left(f(p_i) - f(p)\right)\right) = f(p) + \sum_{i=1}^{k} t_i \left(f(p_i) - f(p)\right)$$

wenn $f(p_i) \leq f(p) \quad \forall i$

$f(q) < f(p)$ ↯

$$\Rightarrow \exists i_0 \text{ mit } f\left(p_{i_0}\right) \geq f(p)$$

$$\Rightarrow \text{für } q = p + t\left(p_{i_0} - p\right) \subset S_{i_0} \text{ gilt:}$$

$$f(q) = f(p) + t\left(f\left(p_{i_0}\right) - f(p)\right) \geq f(p) \quad \text{mit "=" für } t = 0 \qquad \square$$

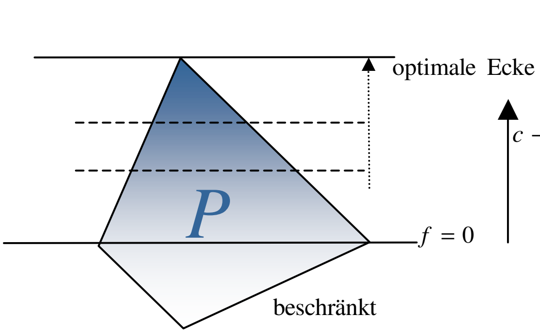
Verfahren zur Bestimmung einer optimalen Ecke eines Polyeders P bzgl. einer Linearform f:

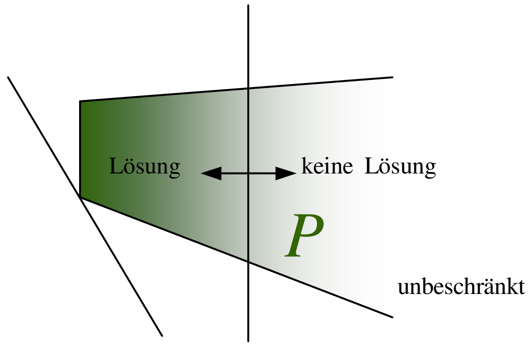
Schritt 1: **Bestimme** eine Ecke von p von P.

Schritt 2: **Untersuche** ob f entlang der Kanten p steigt, wenn nicht, dann ist p optimal
$\Rightarrow$ fertig

Schritt 3: Ist p nicht optimal, so steigt f entlang einer Kante K an p.
Ist die Kante unbeschränkt $\Rightarrow$ es gibt keine Lösung
Ist die Kante beschränkt $\Rightarrow$ $K = [p, q]$ mit $f(p) < f(q)$
Nun beginne mit Schritt 1 und q

Satz 4: (Hauptsatz der linearen Optimierung)
Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder mit einer Ecke p und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear.
Nimmt f auf P sein Maximum an, dann tut es das auch in einer Ecke von P.
Anderenfalls ist P unbeschränkt und es gibt eine unbeschränkte Kante (Strahl)
Von P auf dem $f \to \infty$ strebt.





Schreibweise: Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Definition: $a \overset{(=)}{<} b \iff a_i \overset{(=)}{<} b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Sei $A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_k \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$

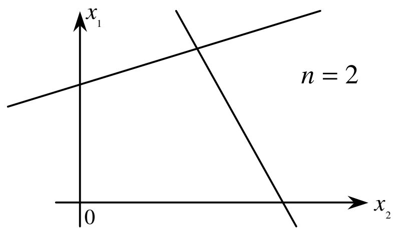
Damit: $P = \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle a_i, x\rangle \le b_i\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$

Allgemeine Form eines linearen Programms (lineares Optimierungsproblem)

Lineare Zielfunktion (=Kostenfunktion): $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = \max/\min$

Nebenbedingungen (= Restriktionen): $Ax \le b$ $\Big\}$ Polyeder in $\mathbb{R}$

Vorzeichenbedingungen: $x \ge 0$ (da $x_1, \dots, x_n$ meist Stückzahl)



Wann enthält das Polyeder $P = \{Ax \le b,\ x \ge 0\}$ den Nullpunkt als Ecke?

Klar, wenn $0 = A \cdot 0 \le b \Rightarrow b \ge 0 \Rightarrow 0 \in P$, da $\{0\} = \{x = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\langle e_i, x\rangle = 0\}$

Da $e_1, \dots, e_n$ linear unabhängig $\Rightarrow$ 0 ist Ecke von P

Satz 5: Sei $0 \ne P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Dann sind äquivalent:

a) P besitzt eine Ecke

b) Es gibt eine Affinität $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(P) = \{Ax \le b_1,\ x \ge 0\}$ mit $b \ge 0$

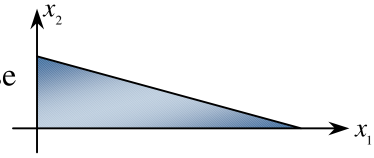
c) Es gibt eine Affinität $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(P) = \{Ax \le b,\ x \ge 0\}$

Satz 6: Nimmt eine Linearform f auf dem Polyeder $P=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax\le b,\ x\ge 0\right\}$ mit $A\in M\left(m\times n,\mathbb{R}\right)$ ihr Maximum an und ist $m<n$, so wird das Maximum schon in einer Ecke $p=\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}\in P,\ \#\left\{p_r\ne 0\right\}\le m$ angenommen.

In $\mathbb{R}^2,\ m<n-2\ \Rightarrow\ m=0,1$

$m=1$ $\Rightarrow$ jede Ecke liegt auf mindestens einer Koordinatenachse

$\Rightarrow$ Behauptung.



Beweis: $P=\left(x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax\le b,\ x\ge 0\right)$ mit $A=\begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_m \end{pmatrix}$

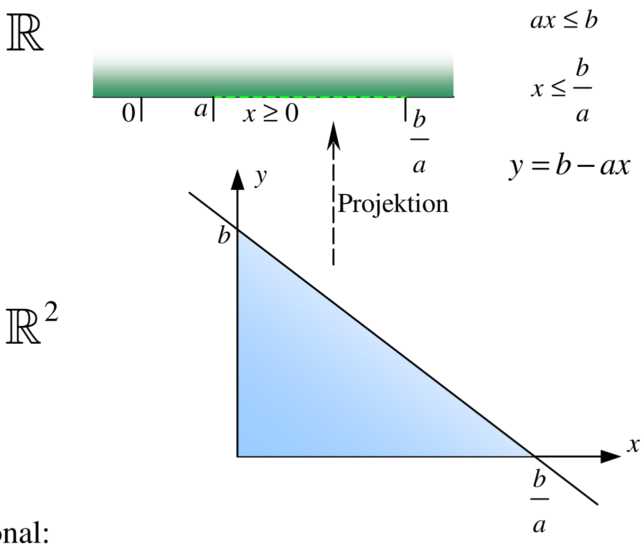
$$P=\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\left\langle a_i,x\right\rangle\le b\right\}\cap\bigcap_{j=1}^{n}\left\{\left\langle e_j,x\right\rangle\ge 0\right\}$$

Jede Ecke p wird durch n linear unabhängige Hyperebenen ausgeschnitten. Da $m<n$, sind unter diesen Hyperebenen $\ge n-m$ Koordinatenebenen $\left\{\left\langle e_j,x\right\rangle=0\right\}$. Damit können höchstens m Koordinaten von $p\ne 0$ seien

Schlupfvariablen.

Das System von Ungleichungen $ax\le b,\ x\ge 0$ $\left(\text{in } \mathbb{R}\right)$ ist äquivalent zu dem System $ax+y=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ in $\mathbb{R}^2$

Graphisch:



$ax\le b$

$x\le\frac{b}{a}$

$y=b-ax$ Lösungsmenge (=Polyeder) in $\mathbb{R}$
= Projektion der Lösungsmenge in $\mathbb{R}^2$ auf die x-Achse.

Man nennt y **Schlupfvariable**.

Höherdimensional:

Aus dem linearen Programm:

Zielfunktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Restriktionen $Ax\le b$

Vorzeichenbedingung $x\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^n$

Und durch „Schlupfen“ das folgende Optimierungsproblem in Normalform.

$$\begin{cases} f(x) = \max(\text{oder } \min) & f(x,y) = f(x),\ \ f: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R} \\ (A, \mathbb{1}_m) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b & \text{Restriktionen mit } y \in \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 & \text{Vorzeichenbedingungen} \end{cases}$$

$$(A, \mathbb{1}_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t a_1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ {}^t a_m & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Beispiel: Pyramide $P = \operatorname{conv}\{0, e_1, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$

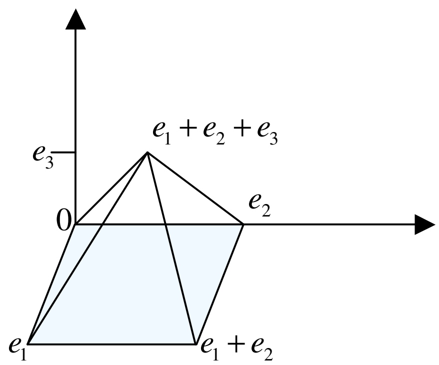
P im 1. Quadranten $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ Halbebenen Basis

Links: $\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 0 \right\}$

Hinten: $\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 0 \right\}$

Rechts: $\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 1 \right\}$

Vorne: $\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle \leq 1 \right\}$



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rrrl} & -x_2 & +x_3 & \leq 0 \\ -x_1 & & +x_3 & \leq 0 \\ & x_2 & & \leq 1 \\ x_1 & & & \leq 1 \end{array}\right\} x_i \geq 0$$

4 Ungleichungen $\Rightarrow$ Schlupfvariable $y_1, \ldots, y_4$

$$\begin{array}{llllll} & -x_2 & +x_3 & +y_1 & = 0 \\ -x_1 & & +x_3 & +y_2 & = 0 \\ & x_2 & & +y_3 & = 1 \\ x_1 & & & +y_4 & = 1 \end{array} \qquad x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$