Sei B Darstellungsmatrix einer Bilinearform und C Übergangsmatrix
^tCBC neue Darstellungsmatrix

$\mathrm{Rg}\, C = n = \dim V$
$\Rightarrow \mathrm{Rg}\left({}^tCBC\right) = \mathrm{Rg}\, B$
$\Rightarrow$ Rang der Darstellungsmatrix einer Bilinearform ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition: Der Rang einer Bilinearform φ ist der Rang einer Darstellungsmatrix für φ

$$\mathrm{Rg}\,\varphi = \mathrm{Rg}\, B$$

Beispiel: a) $\varphi = f \otimes g$

$$\mathrm{Rg}\, f \otimes g = \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \cdot \left(g_1, \ldots, g_n\right)\right) \leq 1$$

b) $\langle .,. \rangle$ Skalarprodukt hat die Darstellungsmatrix $\mathbb{1}$

$\Rightarrow \mathrm{Rg}\langle .,. \rangle = \mathrm{Rg}\, \mathbb{1}_n = n$

Wdh.: $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Skalarprodukt
$\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge
orthogonales Komplement:

$$\mathbb{M}^\perp = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| \langle y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{M} \right\}$$

Allgemein: $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ Bilinearform
$\mathbb{M} \subseteq \mathbb{V}$
orthogonales Komplement von $\mathbb{M}$ bzgl. φ

$$\mathbb{M}^\perp = \left\{ v \in \mathbb{V} \middle| \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{M} \right\}$$

Beispiel: $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

$\varphi_B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}, \varphi_B(x, y) = {}^txBy$

$$\mathbb{V}^\perp = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \middle| \varphi_B(x, y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{K}^n \middle| {}^txBy = 0 \quad \forall y \in \mathbb{K}^n \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{K}^n \middle| {}^txB = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{K}^n \middle| {}^tB \cdot x = 0 \right\} =$$
$$= \ker\left({}^tB : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n\right) =$$
$$= \text{Entartungsraum von } \varphi$$

Definition: Eine Bilinearform φ heißt nicht-entartet (nicht-ausgeartet), wenn $\mathbb{V}^{\perp}=\{0\}$. Das ist äquivalent zu:

$\Leftrightarrow$ für alle $v\in\mathbb{V}$ $(v\neq 0)$ gibt es ein $w\in\mathbb{V}$ mit $\varphi(v,w)\neq 0$

$\Leftrightarrow$ aus $\varphi(v,w)=0$ für alle $w\in\mathbb{V}\Rightarrow v=0$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rg}\varphi=n=\dim\mathbb{V}$

Beispiel: Das Skalarprodukt ist nicht ausgeartet.

$\varphi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ Bilinearform

$$v\in\mathbb{V}\text{ fest}\Rightarrow\varphi_v:\mathbb{V}\to\mathbb{K},w\mapsto\varphi_v(w)=\varphi(v,w)$$

$$\varphi_v = \varphi(\mathrm{v},.)$$

$$\varphi_v=\varphi(v,.)\in\mathbb{V}^*=Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{K})$$

$\Rightarrow$ Homomorphismus von Vektorräumen

$$F:\begin{cases}\mathbb{V}\to\mathbb{V}^*\\ v\mapsto\varphi_v\end{cases}\Rightarrow F\in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{V}^*)$$

Satz 2: Die Zuordnung $\varphi\mapsto F$ definiert einen **kanonischen Isomorphismus** von Vektorräumen.

$$\left\{\begin{matrix}Bilinearformen\\ \varphi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\sim}Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{V}^*)$$

$$\varphi \quad\mapsto\quad F$$

Beweis: Umkehrabbildung: $(F:\mathbb{V}\to\mathbb{V}^*)\in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{V}^*)$

$$\mapsto\varphi_F:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K},\varphi_F(v,w)=\underbrace{(F(v))}_{\in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{K})}(w) \qquad \square$$

Mit Basen bzw. mit $\mathbb{V}=\mathbb{K}^n$

$\varphi:\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K},\varphi(x,y)={}^txBy\quad\forall x,y\in\mathbb{K}^n$

mit $B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow\varphi_x:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K},\varphi_x(y)=\varphi(x,y)={}^txBy$

$\varphi_x={}^txB$ (Zeilenvektor)

D.h. Darstellungsmatrix von φ_x ist de Zeilenvektor ${}^txB$

Identifizieren wir $\mathbb{V}^*=(\mathbb{K}^n)^*=\mathbb{K}^n$ (Spaltenvektoren)

$\Rightarrow F:\mathbb{V}=\mathbb{K}^n\to\mathbb{V}^*=\mathbb{K}^n$

$x\mapsto{}^t({}^txB)={}^tBx$

$\Rightarrow$ Darstellungsmatrix F ist ${}^tB$

Propostition 3: Sei $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ Bilinearform
Dann ist äquivalent:
a) φ ist nicht ausgeartet
b) für alle $0 \neq v \in \mathbb{V}$ gibt es ein $w \in \mathbb{V}$ mit $\varphi(v,w) \neq 0$
c) $\operatorname{Rg} \varphi = \dim \mathbb{V}$
d) zu jeder Linearform $f \in \mathbb{V}^*$ gibt es ein $v \in \mathbb{V}$ mit $f = \varphi_v$
(d.h. $f(w) = \varphi_v(w) = \varphi(v,w) \quad \forall w \in \mathbb{V}$)

Beweis: Es genügt $d) \Leftrightarrow c)$ zu zeigen

d) bedeutet $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*, v \mapsto \varphi_v$ ist surjektiv.

Da $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{V}^*$ gilt: F surjektiv $\Leftrightarrow$ F bijektiv

Aber: F Bijektiv $\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Rg} F}_{= \operatorname{Rg}\varphi} = \dim \mathbb{V}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Rg} \varphi = \dim \mathbb{V} \Leftrightarrow c)$ $\square$

Satz 4: Sei φ eine Bilinearform auf einen Vektorraum $\mathbb{V}$ und $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum, so dass $\varphi/\mathbb{U}$ nicht ausgeartet ist.
Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^\perp$$

Beweis: $\varphi/\mathbb{U}$ nicht ausgeartet bedeutet:

$\varphi/\mathbb{U} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{K}$ nicht ausgeartet.

Sei $v \in \mathbb{V}$ beliebig

$\Rightarrow \varphi_v : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ Linearform

$\Rightarrow \varphi_v/\mathbb{U} : \mathbb{U} \to \mathbb{K}$ Linearform

Prop3 angewandt auf $\varphi/\mathbb{U}$

$\Rightarrow \exists u \in \mathbb{U}$, so dass $\varphi_v/\mathbb{U} = \varphi_u/\mathbb{U}$

$\Rightarrow \varphi(v,w) = \varphi(u,w) \quad \forall w \in \mathbb{U}$

$\Leftrightarrow \varphi(v-u,w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{U}$

$\Rightarrow v-u \in \mathbb{U}^\perp = \{x \in \mathbb{V} \mid \varphi(x,w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{U}\}$

Sei $v-u = u^\perp \in \mathbb{U}^\perp$

$\Leftrightarrow v = u + u^\perp$ mit $u \in \mathbb{U}, u^\perp \in \mathbb{U}^\perp$

$\Rightarrow \mathbb{U} + \mathbb{U}^\perp = \mathbb{V}$

z.Z.: $\mathbb{U} \cap \mathbb{U}^\perp = \{0\}$

Annahme: $u \in \mathbb{U} \cap \mathbb{U}^\perp$

$\Rightarrow \varphi(u,v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}$

Aber $\varphi/\mathbb{U}$ nicht ausgeartet $\Rightarrow u = 0$ $\square$

<u>Bemerkung</u>: Sei $\varphi, \mathbb{V}, \mathbb{U}, \mathbb{U}^\perp$ wie in Satz 4, $\dim \mathbb{V} < \infty$

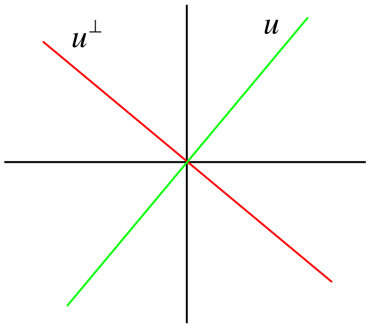
Für $u \in \mathbb{U}, u^\perp \in \mathbb{U}^\perp$

$$\Rightarrow \varphi(u^\perp, u) = 0$$

Ist B_1 Darstellungsmatrix von $\varphi / \mathbb{U}$

Und B_2 Darstellungsmatrix von $\varphi / \mathbb{U}^\perp$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \text{Darstellungsmatrix von } \varphi$$



Beispiele: a) $\mathbb{1}_2 \Rightarrow \varphi_{\mathbb{1}_2} = \langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarprodukt

$\mathbb{U} = \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}^2$ Gerade

$\mathbb{U}^\perp$

Rechter Winkel in euklidischer Geometrie

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Minkowski Produkt)

$\mathbb{U} = \mathbb{R}x \subset \mathbb{R}^2$ Gerade

$\mathbb{U}^\perp = ?$

$$y \in \mathbb{U}^\perp \Leftrightarrow 0 = \varphi_B(y, x) = {}^t y \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \right) = \left\langle y, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \right\rangle$$

$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$ Spiegelung an x_1 Achse

<u>Spezialfall</u>: $\mathbb{U}_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{U}_3^\perp = \mathbb{U}_3$$

$\cancel{\mathbb{U}_3 \oplus \mathbb{U}_3^\perp \neq \mathbb{R}^2}$

denn $\varphi_B / \mathbb{U}_3$ ist ausgeartet.