Beispiel: „LeckerSchoki&Co“

$f(x) = 30x_1 + 50x_2$ Zielfunktion (Maximieren)

Restriktionen : $\left.\begin{array}{lll} 3x_1 & +2x_2 & <18 \\ x_1 & & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Vorzeichenbedingungen: $x_1, x_2 \geq 0$

Schlupfvariable y_1, y_2, y_3 (weil 3 Ungleichungen)

$$\left.\begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_2 & +y_1 & =18 \\ x_1 & & +y_2 & =4 \\ & 2x_2 & +y_3 & =12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Zielfunktion $\tilde{f}(x,y) = f(x)$

Statt den LP $f(x) = \max \quad (\text{oder } \min)$

$$(A, \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

schreibt man: $f(x) = \max \quad (\text{oder } \min)$

$$A'x' = b, \; A' \in M(m \times (n+m), \mathbb{R}), \; x \geq 0, \; x' \in \mathbb{R}^{n+m}$$

§ 7 Ecken und Basislösung

Optimierungsproblem (LP) mit
Restriktionen $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n, \mathbb{R}), x \geq 0, n > m, x \in \mathbb{R}^n$

Œ Rg $A = m$ (maximal)

Schreibe: $A = (a_1, \dots, a_n)$ mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$

Basisauswahlsatz: $\exists B \subset \{1, \dots, n\}, \; \#B = m$, so dass $\{a_j \,|\, j \in B\}$ sind linear unabhängig

B heißt (in diesem Kapitel) **Basismenge**.

$N = \{1, \dots, n\} - B$ Nichtbasismenge

$A_B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}), \quad B = \{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n\}$

$A_N = (a_{k_1}, \dots, a_{k_{n-m}}), \quad N = \{1 \leq k_1 < \dots < k_{n-m} \leq n\}$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_m} \end{pmatrix}$$

$$Ax = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$(A_B, A_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$\Rightarrow Ax = (A_B, A_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$$= A_B x_B + A_N x_N = b$$

Betrachte A_B invertierbar

Eine Basislösung zur Basismenge B ist eine Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ von $Ax = b$ mit

$x_k = 0 \;\; \forall k \in N$ bzw. $x_N = 0$.

Damit wird die Basislösung x eindeutig durch den Teilvektor x_B bzw.

$(x_B, 0), \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt. Es gilt:

$$x_B = A_B^{-1} b,$$

denn $b = Ax = A_B x_B + A_N x_N = A_B x_B$

Definition: Eine Basislösung x heißt **zulässig**, wenn $x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

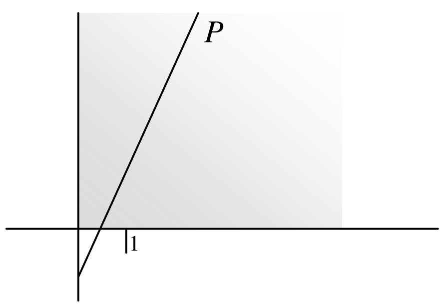
Satz 1: Für $p \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) p ist eine Ecke von $P = \{1 \mid Ax = b, x \geq 0\}$

b) p ist zulässige Basislösung

Beweis: fehlt leider, aber wir glauben das auch so*g*

Beispiel: 1) $n = 2,\ A = (2, -1),\ b = 1,\ p = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| Ax = b,\ x \geq 0 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, \begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{matrix} \right\}$



P hat die Ecke $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Dazu gehört die Basismenge $B=\{1\}$, $N=\{2\}$

$p_B = p_1 = \frac{1}{2} \geq 0, \quad p_N = p_2 = 0 \geq 0$

$A_B = 2$ invertierbar

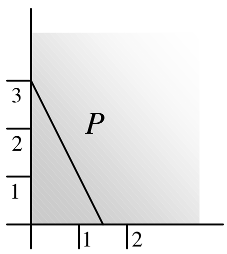
$\Rightarrow$ p zulässige Basislösung

2) $n=2,\ m=1$

$A=(2,1),\ b=3$

$$p=\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 2x_1+x_2=3 \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

2 Ecken: $\underbrace{p=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{B=\{1\},\ N=\{2\}}$, $\underbrace{q=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B=\{2\},\ N=\{1\}}$

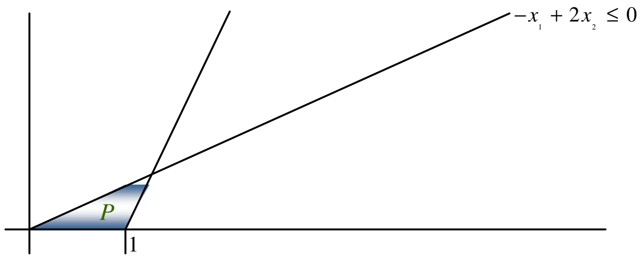


Beispiel: Lineares Programm

max/ min $\quad x_1 - x_2$

$$\text{unter den Restriktionen} \left.\begin{matrix} -x_1 & +2x_2 & \leq 0 \\ -3x_1 & +x_2 & \geq -3 \\ x_1,x_2 & & \geq 0 \end{matrix}\right\} P$$

1. Graphische Lösung [[müssen wir in der Klausur nicht machen]]



2. Schlupfvariablen, Normalform

$m=2$ Restriktionen und 2 Vorzeichenbedingungen

$\Rightarrow m=2$ Schlupfvariablen $x_3, x_4 \ \Rightarrow\ n=m+2-4$

$$\left.\begin{matrix} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & & =0 \\ 3x_1 & -x_2 & & +x_4 & =3 \\ x_1,\dots,x_4 & & & & \geq 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

3. Basismenge $B \subset \{1,?\}$

Unterdeterminante A: $A_{(1,2)}: \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow B = \{1,2\}$

$A_{(1,3)}: \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow B = \{1,3\}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Alle sechs Möglichkeiten sind zulässig
$B \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

4. Suche nach Basislösung
   - $B = \{1,2\},\ N = \{3,4\}$

     Suche Lösung von $Ax = b$ mit $x_3 = x_4 = 0$

     $$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A_B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

     [• entweder ausrechnen
     • oder inverse ausrechnen: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$]

     $$\Rightarrow x = {}^t\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5},0,0\right) \quad [\geq 0 \Rightarrow \text{zulässig}]$$

   - $B = \{1,3\},\ N = \{2,4\},\ x_2 = x_4 = 0$

     $$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 \quad &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad x = {}^t(1,0,1,0)\ [\geq 0 \Rightarrow \text{zulässig}]$$

   - $B = \{2,3\},\ldots. \qquad \Rightarrow x = {}^t(0,-1,6,0)$ nichtzulässig $[-3 < 0]$

     $\vdots$

$$\Rightarrow \text{zulässige Basislösung:} \left\{\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

5. Werte der Zielfunktion: $f(x) = x_1 - x_2$

   $p\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

   $p(1,0) = 1 \qquad$ optimal $\quad f(0,0) = 0$