LP $\triangleq$ Lineares Programm

1) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + x_4 &= b_1 \\ a_{11}x_1 \quad + x_5 &= b_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} x = (\vdots)$

2) $B = \{1,2\}$, falls $\det A_B \neq 0 \Rightarrow x = A_B^{-1}b$

$B = \{1,3\}$		Basismenge B	Basis 1 zulässig	$f(x)$
$\{1,4\}$		$B = \{1,2\}$	x	x
$\{1,5\}$		$B = \{1,3\}$	x	x
$\{2,3\}$	$\{3,4\}$			
$\{2,4\}$	$\{3,5\}$			
$\{2,5\}$	$\{4,5\}$			

Stoff:
Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix
A orthogonal ${}^tA = A^{-1}$
$A^{-1}SA = (\ddots)$

$SA = A(\ddots) \qquad SA = A\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ dann kann man A ausrechnen

$\lambda_s(x) \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Definitheit; quadratische Form; symmetrisch; alternierend; unitär $\Rightarrow$ Untersuchen, ob Matrix orthogonal ist; affine Unabhängigkeit; Jordannormalform

LP $\qquad Ax = b \qquad A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0$$

$\Rightarrow$ Sei $B = \{g_1, \ldots, g_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ Basismenge

$N = \{1, \ldots, n\} - B$

LP $\Leftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \qquad \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} > 0$

Da $\operatorname{Rg} A_B = m$ können wir mit A_B^{-1} multiplizieren

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + A_B^{-1}A_N x_N = (\mathbb{1}_n, A_B^{-1}A_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = A_B^{-1}b \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases}$$

Satz: $\qquad A_N{}' = A_B^{-1}A_N, \; b' = A_B^{-1}b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + A_N{}' x_N = b' \\ x_N, x_B \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dann ist p mit $p_B = b',\ p_N = 0$ eine Basis

$-p$ ist zulässig $\Leftrightarrow p_B = b' \geq 0$

Umbenennung: $m \to m,\ m-n \to n,$
$$x_B \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$x_N \mapsto x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$M\left(m\times(n-m),\mathbb{R}\right) = A_N{}' = A_B{}^{-1}A_N \mapsto A \in M\left(m\times n,\mathbb{R}\right)$$
$$b' = A_B{}^{-1}b \mapsto b \in \mathbb{R}^m$$
$$\Rightarrow \mathrm{LP} = \mathrm{LP}(xy)\begin{cases} Ax + y = b \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Eine Basislösung von $\mathrm{LP}(xy)$ ist b bzw. (a,b) und diese Basislösung zulässig, wenn $b \geq 0$.

Annahme b nicht zulässig

7 Koeffizienten $b_i < 0$ Œ $b_1,\dots,b_k < 0,\ b_{k+1},\dots,b_m \geq 0$

2te Erweiterung des Systems durch Variable $z_1,..,z_k,\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$

Betrachte das System:

$$\mathrm{LP}(x,y,z) = \begin{cases} -a_{11}x_1 & -\dots - a_{1n}x_n & -y_1 & & +z_1 & = -b_1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ -a_{k1}x_1 & -\dots - a_{kn}x_n & -y_k & & +z_k & = -b_k \\ a_{k+1,1}x_1 & +\dots + a_{k+1,n}x_n & & +y_{k+1} & & = b_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\dots + a_{mn}x_n & & +y_m & & = b_m \end{cases} \qquad x, y, z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} Ax + \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m-n} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} b$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} A, \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} b$$

- Eine Lösung von $\mathrm{LP}(x,y,z)$ der Form $(x,y,0)$ mit $x, y \geq 0$ ist keine zulässige Lösung von $\mathrm{LP}(x,y)$ der Form (x,y).

- Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Basislösung von $\mathrm{LP}(x,y)$, so ist $(x,y,0)$ auch eine Basislösung von $\mathrm{LP}(x,y,z)$.
- Sei (x,y,z) zulässige Basislösung von $\mathrm{LP}(x,y,z)$ mit Basismenge $\tilde{B} \subset \{1,\dots,n+m+k\}$ und Nichtbasismenge $\tilde{N}$
  $\Rightarrow \#\tilde{B} = m \;\Rightarrow\; \#\tilde{N} = n+k$

Falls: $\tilde{B} \subset \{1,\dots,n+m\}$ bzw. $\tilde{B} \subset (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$
$\Rightarrow \{n+m+1,\dots,n+m+k\}$ bzw. $\{z_1,\dots,z_k\} \in \tilde{N}$
$\Rightarrow z = 0 \;\Rightarrow\; (x,y,z) = (x,y,0) \longrightarrow$ liefert Lösung (x,y) von $\mathrm{LP}(x,y)$

Falls: $\tilde{B} \not\subset \{1,\dots,n+m\} \;\Rightarrow\;$ z.B. $z_1,\dots,z_k \in \tilde{B}$

$$\Rightarrow \left[\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & \\ & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} A}_{n}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & \\ & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix}}_{m}}_{\text{dazu } m-l} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & \\ & 0 \end{pmatrix} \right]$$ (konnte ich leider net ganz entziffern, wenn's jmd. hat...)

$$\mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & \\ & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} A, \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_k & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{m-k} \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Rg}(A, \mathbb{1}_m) = m$$

$\Rightarrow$ es gibt weitere l Spalten in ,so dass nur zusammen mit den $m-l$ Spalten genau $(m-l)+l = m$ linear unabhängige Spalten finden.

Diese $(m-l)+l$ linear unabhängige Spalten bilden eine Untermatrix A' von $\left[\begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \circ (A, \mathbb{1}) \right]$. Dazu gehört eine Basismenge $\tilde{\tilde{B}}$ mit $\tilde{\tilde{B}} \subset \{1,\dots,n+m\}$ bzw. $\tilde{B} \subset (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$.

$\Rightarrow$ das liefert eine zulässige Basislösung der Form $(x,y,0)$
$\Rightarrow (x,y)$ von $\mathrm{LP}(x,y)$ $\square$

Gegeben: $\mathrm{LP}(x,y)$ bzw. $\mathrm{LP}(x,y,z)$ mit Zielfunktion $\tilde{f}x,y,z = z_1 + \dots + z_k \overset{!}{=} m$, wenn (x,y) zulässige Basislösung von $\mathrm{LP}(x,y)$

$\Rightarrow (x,y,0)$ zulässige Basislösung von (x,y,z) aber $\tilde{f}(x,y,0) = 0$
$\Rightarrow (x,y,0)$ ist optimal für $\tilde{f}$

Frage: Gibt es immer optimale Lösungen für $\tilde{f}$?

Antwort: Solange das Polyeder Ecken hat, denn wegen $z_i \geq 0$ keine f auf keiner Kante $\to -\infty$ gehen.

Sei $\tilde{p} = (x, y, z)$ eine optimale Ecke für $\tilde{f}$

Sei $z_0 = \tilde{f}(\tilde{p}) = z_1 + \ldots + z_k$ (Minimum)

Fallunterscheidung:

Falls: $z > 0 \;\Rightarrow$ es kann keine zulässige Basislösung von $\mathrm{LP}(x, y, z)$ mit $z = 0$ geben $\Rightarrow$ es gibt keine zulässige Basislösung von $\mathrm{LP}(x, y)$

Falls: $z = 0 \;\Rightarrow \beta = (x, y, 0)$ und (x, y) ist zulässige Basislösung von $\mathrm{LP}(x, y)$

Wie findet man zulässige Basislösung von $\mathrm{LP}(x, y, z)$?

Die folgende tut's: $x_B = {}^t(y_{k+1}, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k) = (b_{k+1}, \ldots, b_m, -b_1, \ldots, -b_k)$

$$x_N = {}^t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0$$

Probe: $A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_m \end{pmatrix}$

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
 & & & & & \overbrace{\qquad}^{m-k} & & & \overbrace{\qquad}^{n} & \\
-{}^t a_1 & -1 & & & 0 & & & 1 & & \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\
-{}^t a_k & & & -1 & & & 0 & & & 1 \\
\hline
{}^t a_{k+1} & 0 & & & 1 & & & 0 & & \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\
{}^t a_m & & & 0 & & & 1 & & & 0 \\
 & & \underbrace{\qquad}_{\tilde{A}_N} & & & & & \underbrace{\qquad}_{\tilde{A}_B} & &
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_m \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{A}_N x_N + \tilde{A}_B x_B = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \tilde{A}_B^{-1} \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = {}^t A_B \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \left| \tilde{A}_B^{-1} = {}^t A_B \right.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{m-k} \\ \mathbb{1}_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ \vdots \\ b_m \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_k \end{pmatrix} \geq 0 \quad \square$$