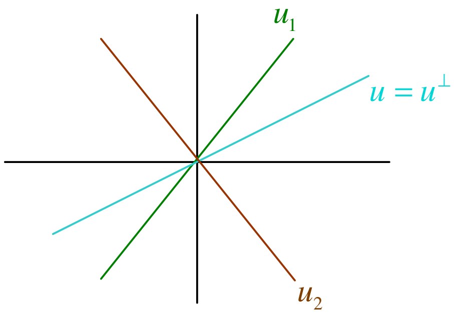
c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ symplektisch

$\varphi_C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$\mathbb{U} = \mathbb{R}x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{U}^\perp =$ gesucht!

$$y \in \mathbb{U}^\perp \Leftrightarrow \varphi_C(y,x) = {}^t y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \left\langle y, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \right\rangle = 0$$

$$\mathbb{U}^\perp (\text{symplektisch}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{U} \right)^\perp \quad \text{euklidisch}$$

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

1. Spiegeln an Hauptdiagonale
2. Spiegeln an x_1 – Achse
3. Drehung um den euklidischen rechten Winkel

Zwei Spiegelungen hintereinander ausgeführt ist das gleiche wie eine Drehung um zweimal Winkel zwischen den Spiegelachsen.

$\Rightarrow$ in symplektischer Geometrie in $\mathbb{R}^2$ gilt für eindimensionale Unterräume:

$$\mathbb{U}^\perp = \mathbb{U}$$

Definition: Eine Bilinearform φ auf $\mathbb{V}$ heißt:

- symmetrisch, wenn $\varphi(v,w) = \varphi(w,v) \quad \forall v,w \in \mathbb{V}$
- alternierend, wenn $\varphi(v,w) = -\varphi(w,v) \quad \forall v,w \in \mathbb{V}$

Beispiel:

- $\langle .,. \rangle = \varphi_1$ symmetrisch
- $\varphi_B,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ symmetrisch
- $\varphi_c : \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alternierend

Ist φ Bilinearform auf $\mathbb{V}$ mit Darstellungsmatrix B

φ symmetrisch $\Leftrightarrow B$ symmetrisch $\quad {}^t B = B$

φ alternierend $\Leftrightarrow B$ alternierend $\quad {}^t B = -B$

Beispiel: $g, f \in \mathbb{V}^*$

$$f \otimes g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}, \quad (f \otimes g)(v,w) = f(v) \cdot g(w); \quad \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} (g_1, \dots, g_n)}_{\text{Darstellungsmatrix}}$$

nicht symmetrisch oder alternierend

aber $\underbrace{f \wedge g}_{\text{Dachprodukt}} := f \otimes g - g \otimes f$ ist alternierend

Satz 5: (Symmetrie-Zerlegung)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$

Dann lässt sich jede Bilinearform φ auf einem $\mathbb{K}-$Vektorraum $\mathbb{V}$ eindeutig als Summe $\varphi = \varphi_S + \varphi_A$

mit einer symmetrischen Bilinearform φ_S und einer alternierenden Bilinearform φ_A schreiben.

Beweis: Definition:

$$\varphi_S(v,w) = \frac{1}{2}\big(\varphi(v,w) + \varphi(w,v)\big)$$

$$\varphi_A(v,w) = \frac{1}{2}\big(\varphi(v,w) - \varphi(w,v)\big)$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_S + \varphi_A$$

Eindeutigkeit: Ist $\varphi = \varphi_S' + \varphi_A'$ eine weiter Symmetriezerlegung

$$\varphi_S(v,w) = \frac{1}{2}\big(\varphi(v,w) + \varphi(w,v)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\varphi_S'(v,w) + \varphi_A'(v,w) + \varphi_S'(w,v) + \varphi_A'(w,v)\Big) =$$

$$= \varphi_S'(v,w)$$

□

In Matrizen

φ Darstellungsmatrix B

φ_S Darstellungsmatrix $S = \frac{1}{2}\left(B + {}^tB\right)$

φ_A Darstellungsmatrix $A = \frac{1}{2}\left(B - {}^tB\right)$

§2 Symmetrische Bilinearformen

Wichtige Beispiele: Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ Matrix $\mathbb{1}_n$

euklidisches Skalarprodukt

Minkowski Form auf $\mathbb{R}^4$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$

Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

Sei $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform

φ definiert eine quadratische Form

$q_\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$

$v \mapsto \varphi(v, v)$

Beispiel: a) quadratische Form des euklidischen Skalarprodukts:

$q_{\langle .,. \rangle} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto q_{\langle .,. \rangle}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$$

b) die Minkowski-Form auf $\mathbb{R}^4$ definiert die quadratische Form:

$q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$

Satz 1 (Polarisationsformel)

Für eine symmetrische Bilinearform φ auf einem $\mathbb{K}$ – Vektorraum $\mathbb{V}$ (mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$) gilt:

$$\varphi(v, w) = \frac{1}{2}\left(q_\varphi(v + w) - q_\varphi(v) - q_\varphi(w)\right)$$

für alle $v, w \in \mathbb{V}$, insbesondere ist φ durch q_φ eindeutig bestimmt.

Beweis: $q_\varphi(v + w) = \varphi(v + w, v + w) = q_\varphi(v) + 2\varphi(v, w) + q_\varphi(w)$ □

Satz 2 (Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen)

Sei $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$, sei φ eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{K}$ – Vektorraum $\mathbb{V}$.

Dann gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ mit $\varphi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$

Bezüglich dieser Basis ist die Darstellungsmatrix von φ

$$\left(\varphi(v_i, v_j)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} q_\varphi(v_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_\varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

Beweis: Induktion über $n = \dim \mathbb{V}$
Induktionsanfang $n = 1$
Induktionsschritt $1 \leq n \to n+1$
Die Behauptung gelte in $\dim = n$
Sei $\dim \mathbb{V} = n+1$

Fall 1: $\varphi(v, w) = 0 \quad \forall v, w \in \mathbb{V}$

$\Rightarrow \varphi = 0$ (fertig)

Fall 2: $\exists v, w \in \mathbb{V}$ mit $\varphi(v, w) \neq 0$

Polarisationsformel: $\exists v_1 \in \mathbb{V}$, so dass

$q_\varphi(v_1) = \varphi(v_1, v_1) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi / \mathbb{K}v_1$ nicht ausgeartet

§1 Satz 4 $\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{K}v_1 \oplus v_1^\perp \Rightarrow \dim v_1^\perp = \dim \mathbb{V} - 1 = n$

Induktionsvoraussetzung auf $v_1^\perp$ anwenden

$\Rightarrow \varphi / v_1^\perp$ diagonalisierbar

Sei $v_2, \ldots, v_{n+1}$ (Diagonal)Basis von $v_1^\perp$

$v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ Basis von $\mathbb{V}$, so dass $\varphi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ $\square$

In Matrizen

Ist $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ symmetrisch (Darstellungsmatrix von φ)

$\Rightarrow \exists A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ mit ${}^tASA =$ Diagonalmatrix

Beachte Voraussetzung $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$

Wiederholung: Hauptachsentransformation:

$S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch (S Darstellungsmatrix von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow \exists T \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R}) \quad ({}^tTT = \mathbb{1})$ mit $T^{-1}ST =$ Diagonalmatrix

Aus ${}^tTT = \mathbb{1} \quad \Rightarrow T^{-1} = {}^tT$

$\Rightarrow {}^tTST =$ Diagonalmatrix

$\Rightarrow$ über $\mathbb{R}$: Hauptachsentransformation

$\Rightarrow$ Diagonalisierung von symmetrischen Bilinearformen

Satz 3 (Diagonalisierbarkeit symmetrischer Bilinearformen über $\mathbb{R}$)
Zu jeder reellen symmetrischen Matrix S gibt es eine $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ und Zahlen $r, s \geq 0$, so dass

$$ {}^tASA = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r &&&& \\ & -\mathbb{1}_s &&& \\ && 0 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 0 \end{pmatrix} $$

Beweis: Satz 2 $\Rightarrow$ Œ $S = \begin{pmatrix} s_1 && 0 \\ & \ddots & \\ 0 && s_n \end{pmatrix}$

Sei $d_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|s_i|}} & s_i \neq 0 \\ 1 & s_i = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow D = \begin{pmatrix} d_1 && 0 \\ & \ddots & \\ 0 && d_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow {}^tDSD =$ Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{0, \pm 1\}$

Die Elementarmatrix $E_{ij} = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, \dots, e_{j-1}, e_i, \dots, e_n) =$

$$ = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} &&& i &&&& \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& 0 & \cdots & 1 && \\ &&& \vdots && \vdots && \\ &&& 1 & \cdots & 0 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix} \end{array} $$

bewirkt: $ {}^tE_{ij} \begin{pmatrix} s_1 && \\ & \ddots & \\ && s_n \end{pmatrix} \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} s_1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && s_j &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& s_i && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& s_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \exists$ Produkt E von E_{ij}, so dass $\qquad {}^tE\,{}^tDSDE = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r && \\ & -\mathbb{1}_s & \\ && \mathbb{0} \end{pmatrix}$

„Normalform von symmetrischer Bilinearform“