Satz 4: (Sylvestrischer Trägheitssatz)
Sei S eine symmetrische, reelle $n \times n$-Matrix. Die Zahlen r und s der Anzahl der $+1$ bzw. -1 Einträge der Diagonalisierung von S (gemäß Satz 3), sind unabhängig von der Diagonalisierung und eindeutig durch S bestimmt.
Man sagt: (r,s) oder $(r,s,n-r-s)$ ist die **Signatur(Index)** von S und $r-s$ der **Trägheitsindex**.

Beweis: Sei ${}^t\!ASA = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ wie in Satz 3

$\Rightarrow$ $\operatorname{Rg} S = r+s$ ist unabhängig von der Diagonalisierung

$\Rightarrow$ z.Z. r unabhängig von Diagonalisierung

Zu A gehört eine Basis $v_1,\dots,v_n$, so dass

$$\varphi_S(v_i,v_j) = {}^t v_i S v_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ +1 & 1 \le i = j \le r \\ -1 & r < i = j \le r+s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Es gilt: $A = (v_1,\dots,v_n)$)

Sei ${}^t\!A'SA' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{r'} & & 0 \\ & -\mathbb{1}_{s'} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ eine weitere Diagonalisierung.

z.Z. $r = r'$

Annahme: $r \neq r'$, Œ $r' < r$

Sei $A' = (w_1,\dots,w_n)$ also $w_1,\dots,w_n$ Basis bzgl. A'

also $\varphi_S(w_i,w_j) = 0$ für $i \neq j$

$$\varphi_S(w_i,w_j) = \begin{cases} +1 & i \le r' \\ -1 & r' < i \le r'+s' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\mathbb{U}_1 = \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_r\}$ und $\mathbb{U}_2 = \operatorname{span}\{w_{r'+1},\dots,w_n\}$

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2) = \underbrace{\dim \mathbb{U}_1}_{r} + \underbrace{\dim \mathbb{U}_2}_{n-r'} - \underbrace{\dim(\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2)}_{\le n}$$

$\ge r + n - r' - n = r - r' > 0$ da $r' < r$

$\Rightarrow \exists\ 0 \neq u \in \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$

$$\Rightarrow {}^t u S u = \varphi_S(u,u) = q_S(u) \begin{cases} > 0 & \text{weil } u \in \mathbb{U}_1 \\ \le 0 & \text{weil } u \in \mathbb{U}_2 \end{cases}$$

Widerspruch ⚡! $\Rightarrow r = r'$

Korollar 5: Sind S_1 und S_2 symmetrische, reelle Matrizen, dann sind äquivalent:
a) S_1 und S_2 haben dieselbe Signatur
b) $S_1 = {}^t A S_2 A$ für ein $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

Sei $${}^t ASA = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = (v_1, \dots, v_n)$$

d.h. $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ist zugehörige Basis.

Seien: $\mathbb{U}^+ = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_r\}$
$\mathbb{U}^- = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$
$\mathbb{U}_0 = \mathrm{span}\{v_{r+s+1}, \dots, v_n\}$

$$\Rightarrow \quad q_S(v) = \varphi_S(v,v) > 0 \qquad \forall 0 \neq v \in \mathbb{U}^+$$
$$q_S(v) = \varphi_S(v,v) < 0 \qquad \forall 0 \neq v \in \mathbb{U}^-$$
$$q_S(v) = \varphi_S(v,v) = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{U}$$

<u>Spezialfall</u>: $v_i = e_i$

$$\mathbb{U}^+ = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_r\} = \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathbb{U}^- = \mathrm{span}\{e_{r+1}, \dots, e_{r+s}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r+1 \\ \\ r+s \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathbb{U}_0 = \mathrm{span}\{e_{r+s+1}, \dots, e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r+s+1 \\ \\ n \end{array}$$

<u>Bemerkung</u>: $\mathbb{U}_0 = \mathbb{V}^\perp = \ker {}^t S = \ker S =$ Entartungsraum von $\mathbb{R}^n$ bzgl. φ_S

Definition: Eine symmetrische Bilinearform φ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{V}$ heißt

positiv definit, falls $\varphi(v,v) = q_\varphi(v) > 0 \quad \forall 0 \neq v \in \mathbb{V}$
positiv semidefinit, falls $\varphi(v,v) = q_\varphi(v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$
negativ definit, falls $\varphi(v,v) < 0 \quad \forall 0 \neq v \in \mathbb{V}$
negativ semidefinit, falls $\varphi(v,v) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$
indefinit, falls sonst

Bezeichnungen wie oben:

φ_S, S positiv definit auf $\mathbb{U}^+$

φ_S, S negativ definit auf $\mathbb{U}^-$

r = maximale Dimension eines UVR $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass
$\varphi/\mathbb{U}$ <u>positiv</u> definit

s = maximale Dimension eines UVR $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass
$\varphi/\mathbb{U}$ <u>negativ</u> definit

Beispiel: $S = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & & \\ & -\mathbb{1}_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, so dass ${}^tMSM = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{U}^+ = \mathbb{R}^r \times \{0\}^{n-r} = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \text{UVR von } \mathbb{R}^n$$

$M^{-1}\mathbb{U}$ UVR von $\mathbb{R}^n$

$\varphi_S/\mathbb{U}^+ > 0, \quad \varphi_S/M^{-1}\mathbb{U} > 0$

Beispiel: 1) euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ hat die Signatur $(n,0)$ und ist damit positiv definit (Matrix $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$)

2) Minkowski-Form auf $\mathbb{R}^n$ hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Signatur } (3,1) \\ \Rightarrow \text{indefinit} \end{array}$$

3) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenzierbar

$f(x_1, \ldots, x_n) = \ldots$

Partielle Ableitung: $\dfrac{\delta f}{\delta x_i}$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(x)$$

$$\Rightarrow \text{symmetrische Matrix } H_f(x) = \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x) \right)_{i,j}$$

Gradient

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x) \right),$$

wenn $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$

$$\text{und} \qquad H_f(x_0) \text{ positiv definit } \Rightarrow x_0 \text{ lokales Minimum}$$
$$H_f(x_0) \text{ negativ definit } \Rightarrow x_0 \text{ lokales Maximum}$$

Wie erkennt man, ob eine Matrix positiv oder negativ definit ist?

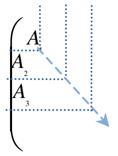
Beispiel: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ negativ oder positiv definit?

$\det S = -1$

$$^t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S \text{ indefinit}$$

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

Sei $A_\nu = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix} \in M_\nu(\mathbb{K})$ die linke, obere ν-te Untermatrix.

$A =$ 

und $\det A_\nu$ heißt ν-ter Hauptminor von A.

Satz 6: Für symmetrische, reelle $n \times n$-Matrizen S gilt:

a) S positiv definit $\Leftrightarrow \det S_\nu > 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$

b) S negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^\nu \det S_\nu > 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$

Beweis: S Darstellungsmatrix von der Bilinearform $\varphi_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzgl. Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$

$\Rightarrow S_\nu$ Darstellungsmatrix von $\varphi_S|\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_\nu\}$

a) "$\Rightarrow$" Ist S positiv definit $\Rightarrow S_\nu$ positiv definit für $\nu = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow$ Index S_ν ist $(\nu, 0)$ für $\nu = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \exists A_\nu \in \mathrm{Gl}_\nu(\mathbb{R})$ mit $^tA_\nu S_\nu A_\nu = \mathbb{1}_\nu$

$\Rightarrow 1 = \det\left({}^tA_\nu S_\nu A_\nu\right) = \underbrace{(\det A_\nu)^2}_{>0} \det S_\nu$

$\Rightarrow \det S_\nu > 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$

"$\Leftarrow$" Induktion über n

$n=1$ nicht zu Zeigen

$n-1 \mapsto n$ alle Hauptminoren von S sind >0 und nach Induktionsvoraussetzung gilt: S_{n-1} positiv definit

$\Rightarrow \exists A_{n-1} \in \mathrm{Gl}_{n-1}(\mathbb{R})$, so dass ${}^tA_{n-1}S_{n-1}A_{n-1} = \mathbb{1}_{n-1}$

Sei $A' = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

$$ {}^tA'SA' = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} S_{n-1} & \delta \\ \hline {}^t\delta & S_{nn} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = $$

$$ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n-1} & {}^tA_{n-1}\delta \\ \hline {}^t\delta A_{n-1} & S_{nn} \end{array}\right) = \ldots = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & S_{nn} \end{array}\right) $$

Sei $A = A'\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_n & -{}^tA_{n-1}\delta \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow {}^tASA = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_n & 0 \\ \hline 0 & S_{nn} \end{array}\right)$

$\Rightarrow S_{nn} = \det {}^tASA = \underbrace{(\det A)^2}_{>0} \underbrace{\det S}_{>0} > 0$

$\Rightarrow$ Index S ist $(n,0) \Rightarrow S$ positiv definit $\Rightarrow$ a)

b) Definition $\Rightarrow S$ negativ definit $\Leftrightarrow -S$ positiv definit

$\Leftrightarrow \det(-S_\nu) > 0$ für $\nu = 1,\ldots,n$

$\Leftrightarrow (-1)^\nu \det S_\nu > 0$ für $\nu = 1,\ldots,n$ $\square$