Beispiel: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \varphi = \varphi_B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

quadratische Form $q = q_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

quadratisches Polynom in x, y

B bzw. φ positiv definit $\Leftrightarrow a > 0, \quad \det B = ac - b^2 > 0$

$$\Leftrightarrow q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Insbesondere: $q\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = ax^2 + 2bx + c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d.h. $q\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ hat keine Nullstelle

Wiederholung: Lösen quadratischer Gleichungen

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad a > 0 \quad \Big|\cdot\frac{1}{a}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac} \qquad \Big| b^2 - ac < 0 \Rightarrow \text{keine reelle Lösung!}$$

B positiv definit $\Rightarrow$ Diskriminante $b^2 - ac < 0$

$$\Rightarrow q\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ hat keine reelle Lösung}$$

Diagonalisierbarkeit symmetrischer Bilinearformen über $\mathbb{C}$

Beachte: $-1 = i^2$

$$\Rightarrow {}^t(i \cdot \mathbb{1}_S) - (\mathbb{1}_S)(i \cdot \mathbb{1}_S) = -i^2 \cdot \mathbb{1}_S = \mathbb{1}_S$$

Satz 7 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Bilinearformen über $\mathbb{C}$

Sei $S \in M_n(\mathbb{C})$ symmetrisch. Dann gibt es eine $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$, so dass

$${}^tASA = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \operatorname{Rg} S$$

§ 3 Die orthogonalen Gruppen

Sei $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ symmetrische nichtausgeartete Bilinearform
Sei weiter φ von der Signatur (r,s), $\quad r+s=n=\dim \mathbb{V}$

Satz 3 $\Rightarrow \exists$ Basis $v_1,\dots,v_n$ von $\mathbb{V}$ (bzw. Isomorphismus $\mathbb{V} \simeq \mathbb{R}^n$),
so dass die Darstellungsmatrix von φ:

$$\left(\varphi\left(v_i,v_j\right)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$$

bzw. es kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\left(e_i,e_j\right) \arrow[d] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, "\varphi_{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}}"] & \\
\left(v_i,v_j\right) & \mathbb{V} \times \mathbb{V} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Es reicht also $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$ zu untersuchen.

Definition: $O_{r,s} = O_{r,s}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tM \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \right\}$

Orthogonale Gruppe vom Index (r,s)

$$M \in O_{r,s} \Rightarrow \quad \begin{aligned} M : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Mx \end{aligned} \quad \text{lineare Abbildung}$$

$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}}(Mx,My) &= {}^t(Mx) \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} (My) = \\
&= {}^tx \left({}^tM \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} M \right) y = {}^tx \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} y = \\
&= \varphi_{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}}(x,y)
\end{aligned}$$

d.h. M lässt die Bilinearform $\varphi_{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}}$ invariant.

Invariant:
Siehe Jordannormalform
WS 03/04

$O_{r,s}$ = Menge der Matrizen, die $\varphi_{\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}}$ invariant lassen

<u>Spezialfall</u>: $\quad r=n, \quad s=0$

$\Rightarrow \varphi_{\mathbb{1}_r} = \langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Skalarprodukt
Skalarprodukt definiert Längen und Winkel
Längenmessung $x,y \in \mathbb{R}^n$

Abstand zwischen x und y

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

Winkel zwischen x und y: $\alpha = \sphericalangle(x,y)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

$$M \in O_n(\mathbb{R}) = O_{n.0}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow d(Mx, My) = d(x,y)$$

$$\cos\sphericalangle(Mx,My) = \cos\sphericalangle(x,y)$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(Mx,My) = \sphericalangle(x,y)$$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzw. $M \in M_n(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn

$$\left.\begin{array}{l}\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \\ \langle Mx, My\rangle = \langle x,y\rangle\end{array}\right\} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$O_{n,0} = O_n = O_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tMM = \mathbb{1}_n\right\} \subseteq \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

die **orthogonale Gruppe**

Bemerkung: Wenn $\langle Mx, My\rangle = \langle x,y\rangle \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow {}^tMM = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow {}^tM = M^{-1} \Rightarrow M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

O_n ist eine Gruppe: Inverse $M^{-1} \in O_n$

Einheits. $\mathbb{1}_n \in O_n$

$$M, N \in O_n \quad \Rightarrow {}^t(MN)(MN) = {}^tN({}^tMM)N = {}^tNN = \mathbb{1}_n$$

Analog für $O_{r,s}$

Ist $M \in O_n$ und $M = (v_1, \ldots, v_n)$ mit Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ denn:

$${}^tMM = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \vdots \\ {}^tv_n \end{pmatrix} (v_1, \ldots, v_n) = \left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{i,j} = \mathbb{1}_n$$

Als lineare Abbildung $M:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $e_i \mapsto Me_i = v_i$

$\Rightarrow M$ bildet die Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ auf die Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ ab.

Ist $w_1, \ldots, w_n$ eine weitere Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow Mw_1, \ldots, Mw_n$ ist wieder Orthonormalbasis

$N = (w_1, \ldots, w_n) \in O_n$

$Mw_i = MNe_i \Rightarrow \square$

O_n ist in diesem Sinne die Menge aller Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1 $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0, 2\pi[\right\}$

Beweis: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2$

$\Leftrightarrow {}^tMM = \mathbb{1} \Leftrightarrow {}^tM = M^{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

NR: $\det\left({}^tMM\right) = \det\mathbb{1} = 1$

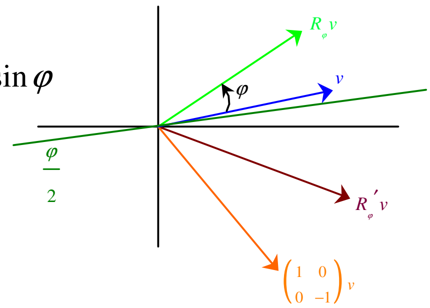
$\quad \|$

$(\det M)^2 \Rightarrow \det M = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det M = 1: & a = d, \quad b = -c, \quad ad - bc = 1 \\ \det M = -1: & a = -d, \quad b = c, \quad ad - cb = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d, & b = -c, \quad a^2 + b^2 = 1 \\ a = -d, & b = c, \quad +a^2 + b^2 = +1 \end{cases}$$

Lösung der Kreisgleichung: $a^2 + b^2 = 1$
ist $a = \pm\cos\varphi \quad b = \pm\sin\varphi$



$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\det R_\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = +1$

$R'_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det R'_\varphi = -1$

$R_\varphi = $ Drehung um Winkel φ

$R'_\varphi = $ Spiegelung an x_1 – Achse gefolgt von Drehung R_φ

$R'_\varphi = $ Spiegelung an der Achse mit Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ zur x_1 – Achse

$\Rightarrow O_2$ besteht aus Drehungen und Spiegelungen

$SO_2 = \{M \in O_2 \mid \det M = 1\} = $ spezielle orthogonale Gruppe

$= \{\text{Drehungen in } \mathbb{R}^2\}$

$$\Rightarrow O_2 = \underbrace{SO_2}_{\text{Drehungen}} \underset{\text{disjunkt}}{\dot\cup} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_2}_{\text{Spiegelungen}}$$

Allgemeiner: $O_n = \{M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathbb{1}_n\}$

$SO_n = \{M \in O_n \mid \det M = 1\} = $ Drehung in $\mathbb{R}^n$

$$O_n = \underbrace{SO_n}_{\text{Drehungen}} \dot\cup \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} SO_n}_{\text{Spiegelungen}}$$