

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

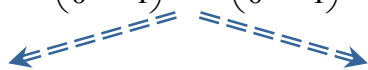
Vorlesung 6

Donnerstag, 6. Mai 2004

$$O_{1,1} = O_{1,1}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^t M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_{1,1}$

$${}^t M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$(\det M)^2 = 1$$

$$\downarrow$$

$$\det M = \pm 1$$

$${}^t M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

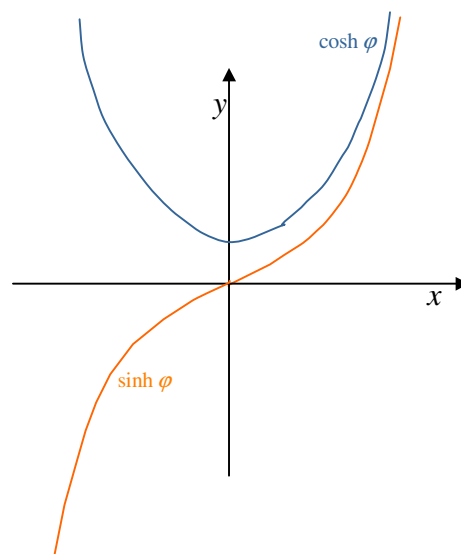
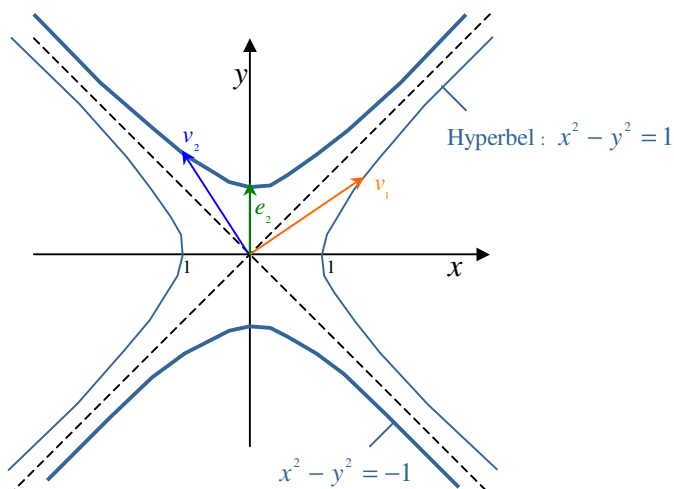
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det M = 1: & a = d, \quad b = c, \quad \det M = ad - bc = a^2 - b^2 = 1 \\ \det M = -1: & a = -d, \quad b = -c, \quad \det M = ad - bc = -a^2 + b^2 = -1 \end{cases}$$

$x^2 - y^2 = -1$ Hyperbelgleichung

Lösung: $x = \pm \cosh \varphi = \pm \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi})$

$$y = \pm \sinh \varphi = \pm \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi})$$

$$\Rightarrow \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$



Möglichkeiten für M:

$$\begin{array}{l}
 \det M = 1 \begin{cases} a > 0: & M = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} = H_\varphi & \rightarrow \text{Hyperbolische Drehung von } \varphi \\
 a < 0: & M = \begin{pmatrix} -\cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{pmatrix} = K_\varphi \end{cases} \\
 \\
 \det M = -1 \begin{cases} a > 0: & M = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{pmatrix} = H'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} H_\varphi \\
 a < 0: & M = \begin{pmatrix} -\cosh \varphi & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} = K'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} K_\varphi \end{cases}
 \end{array}$$

Proposition 2: $O_{1,1} = \{H_\varphi | \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{K_\varphi | \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{H'_\varphi\} \cup \{K'_\varphi\}$
 $= SO_{1,1} \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_{1,1}$

Was bewirken hyperbolische Drehungen?

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

$$v_1 = H_\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \cosh \varphi \\ \sinh \varphi \end{pmatrix} \in \text{Hyperbel } x^2 - y^2 = 1$$

$\Rightarrow \cosh \varphi > 0 \Rightarrow v_1$ liegt im rechten Hyperbelast

$$v_2 = H_\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \sinh^2 \varphi - \cosh^2 \varphi = -1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{array}$$

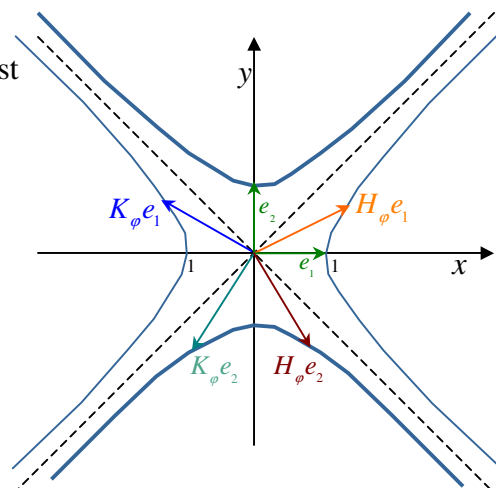
$\Rightarrow v_2$ liegt auf dem oberen Hyperbelast

$H_\varphi(-e_1) \in$ linke Hyperbelast

$H_\varphi(-e_2) \in$ untere Hyperbelast

$\Rightarrow H_\varphi$ erhalten die 4 Hyperbeläste

$$K_\varphi = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung an y-Achse}} H_\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung an x-Achse}}$$



$O_{1,1}$ Gruppe

$SO_{1,1}$ Untergruppe

$$SO_{1,1} = \underbrace{\{H_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}}_{\substack{\text{hyperbolische Drehungen} \\ = \text{Lorentztransformationen}}} \cup \{K_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow H_\varphi \cdot H_\psi$ enthält Hyperbeläste

$$\Rightarrow H_\varphi \cdot H_\psi \in \{H_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow H_\varphi \cdot H_\psi = H_{\varphi+\psi} \leftarrow$ Additionstheoreme der hyperbolischen Funktion

$$\Rightarrow \{H_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \subset SO_{1,1} \subset O_{1,1} \text{ Untergruppe}$$

$S \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, nicht ausgeartet ($\det S \neq 0$)

$$\leadsto \varphi_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_S(x, y) = {}^t x S y$$

Symmetriegruppe von S bzw. φ_S

$$O(S) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M S M = S\} =$$

$$= \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ linear, } \varphi_S(f(x), f(y)) = \varphi_S(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Ist S von der Signatur (r, s) ($r + s = n$)

$$\Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ so dass } {}^t A S A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$$

Proposition 2: $O(S) = A \cdot O_{r,s} \cdot A^{-1}$

Beweis: $M \in O_{r,s} \Leftrightarrow {}^t M \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow {}^t (A M A^{-1}) S (A M A^{-1}) = {}^t A^{-1} {}^t M ({}^t A S A) M A^{-1} =$$

$$= {}^t A^{-1} {}^t M \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} M A^{-1} =$$

$$= {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} A^{-1} = S$$

$$\Rightarrow A M A^{-1} \in O(S) \quad \square$$

Die orthogonalen Gruppen $O_n(\mathbb{R}), O_{r,s}(\mathbb{R})$ gehören zu den sogenannten „klassischen Gruppen“

