Anwendung: Das **Vektor- oder Kreuzprodukt**

$$v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\quad w=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3;\quad M=\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix};\quad M_{12}=\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$v\times w := \begin{pmatrix} \det M_{23} \\ -\det M_{13} \\ \det M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

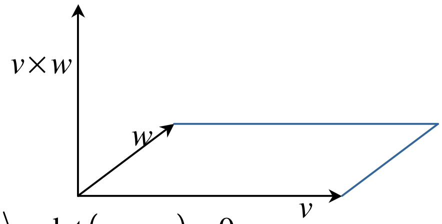
Das Vektorprodukt ist eine Abbildung

$$\times : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad (v,w)\mapsto v\times w$$

Eigenschaften des Vektorproduktes:

1. $\times$ ist alternierend: $v\times w = -w\times v$
2. $\times$ ist bilinear: $(a_1v_1 + a_2v_2)\times w = a_1v_1\times w + a_2v_2\times w$
   (analog in zweite Variable w)
3. $\langle u, v\times w\rangle = \det(u,v,w)$ $\quad [\![$Matrix hat Spalten $u,v,w]\!]$
4. $v\times w = 0 \quad \Leftrightarrow v,w$ linear abhängig
5. $\langle v_1\times v_2, w_1\times w_2\rangle = \langle v_1,w_1\rangle\langle v_2,w_2\rangle - \langle v_1,w_2\rangle\langle v_2,w_1\rangle$
6. $u\times(v\times w) = \langle u,w\rangle v - \langle u,v\rangle w$
7. $\|v\times w\| = \|v\|\cdot\|w\|\cdot|\sin\sphericalangle(v,w)|$

   Gegeben: $v,w\in\mathbb{R}^3$

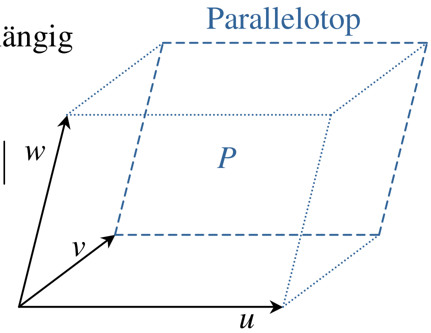


   $\operatorname{span}\{v,w\} = $ Ebene

$$\begin{matrix} v\times w\perp v \\ v\times w\perp w \end{matrix} \Leftarrow \begin{cases} \langle v, v\times w\rangle = \det(v,v,w) = 0 \\ \langle w, v\times w\rangle = 0 \end{cases}$$

   Gegeben: $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ linear unabhängig

$$\operatorname{Vol}(P) = |\langle u, v\times w\rangle| = |\det(u,v,w)|$$



§5 Die symplektische Gruppe

Die nicht ausgeartete alternierende Bilinearform

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \text{ist äquivalent zu} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

Beispiel: $n=3$

$$M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^tM \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_3 \\ -\mathbb{1}_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition: $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tM \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$

heißt **symplektische Gruppe**.

Bemerkung: $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ ist eine Gruppe, Beweis wie bei den orthogonalen Gruppen.

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ ist die Gruppe aller Automorphismen $M : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, die die alternierende Bilinearform $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto {}^tx \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} y$ invariant lassen.

$M : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ heißt **symplektische Automorphismus**.

Satz 1: Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ mit $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$

Dann sind äquivalent:

a) $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$

b) ${}^tM \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$

c) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} {}^tM \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

d) ${}^tAC, {}^tBD$ symmetrisch und ${}^tAD - {}^tCB = \mathbb{1}_n$

Beweis: Wir benutzen $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

a) $\Rightarrow$ b) $\quad M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tM \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow M\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}{}^tM = M\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}M^{-1}\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= -MM^{-1}\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}$$

a) $\Leftrightarrow$ c) a) $\Leftrightarrow {}^tM\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}M = \begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}^{-1}{}^tM\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix} = M^{-1}$$

a) $\Leftrightarrow$ d) a) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^tA&{}^tC\\{}^tB&{}^tD\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\-\mathbb{1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^tA&{}^tC\\{}^tB&{}^tD\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&D\\-A&-B\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}{}^tAC-{}^tCA & {}^tAD-{}^tCB\\ {}^tBC-{}^tDA & {}^tBD-{}^tDB\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^tAC = {}^tCA = {}^t\left({}^tAC\right)$$

$$ {}^tBD = {}^tDB = {}^t\left({}^tBD\right), \qquad {}^tAD-{}^tCB = \mathbb{1} \qquad \square$$

$n=1$

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \underbrace{ad-bc}_{\det}=1\right\} = \left\{M\in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \det M = 1\right\}$$

$\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) = \left\{M\in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \det M \neq 0\right\}$ **allgemeine lineare Gruppe**

$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{M\in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \det M = 1\right\}$ **spezielle lineare Gruppe**

$\Rightarrow \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ Das ist ein Sonderfall!

für $n>1 \quad \Rightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \neq \mathrm{Sl}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{M\in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \det M = 1\right\}$

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}), \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gehören zu den **klassischen Gruppen**.

§6 Hermitesche Formen

Sei $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum

Definition: Eine lineare Abbildung $\varphi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{C}$ heißt **hermitesch**, wenn

1) φ im 1. Argument linear ist

$$\varphi(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,w) = \alpha_1\varphi(v_1,w)+\alpha_2\varphi(v_2,w) \quad \forall v_1,v_2,w\in\mathbb{V}; \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$$

2) $\forall v,w\in\mathbb{V}$ gilt:

$$\varphi(v,w) = \overline{\varphi(w,v)}$$

Bemerkung: Ist φ hermitesch, so ist φ im zweiten Argument $\mathbb{C}$-antilinear

d.h. $\varphi(v,\alpha_1w_1+\alpha_2w_2) = \bar{\alpha}_1\varphi(v,w_1)+\bar{\alpha}_2\varphi(v,w_2)$

Beweis: $\varphi(v,\alpha w)=\overline{\varphi(\alpha w,v)}=\overline{\alpha\varphi(w,v)}=\bar{\alpha}\varphi(v,w)$ $\square$

Bemerkung: φ hermitesch $\Rightarrow \varphi(v,v)\in\mathbb{R}$, denn $\varphi(v,v)=\overline{\varphi(v,v)}$

Standardbeispiel:

$$\langle .,.\rangle:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$$

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i={}^t x\overline{y}$$

$\langle .,.\rangle$ ist die hermitesche Fortsetzung des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$.

Allgemein: $\varphi:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{C}$ hermitesch

$v_1,\dots,v_n\in\mathbb{V}$ eine Basis

$h_{ij}=\varphi(v_i,v_j)$

$\Rightarrow H=(h_{ij})$ Darstellungsmatrix von φ

Für $x=\sum_{i=1}^n x_iv_i,\quad y=\sum_{i=1}^n y_iv_i\in\mathbb{V}$ gilt:

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_iv_i,\sum_{j=1}^n y_jv_j\right)=\sum_{i,j=1}^n x_i\overline{y_j}\quad\varphi(v_i,v_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^n x_ih_{ij}\overline{y_j}={}^t x\cdot H\cdot\overline{y}$$

Bemerkung: $h_{ji}=\varphi(v_j,v_i)=\overline{\varphi(v_i,v_j)}=\overline{h_{ij}}$

$\Rightarrow {}^tH=\overline{H}$

D.h. Die Darstellungsmatrix H einer hermiteschen Form erfüllt die Gleichung:

$${}^tH=\overline{H}\quad\Leftrightarrow\quad{}^t\overline{H}=H$$

Eine solche Matrix ist hermitesch.

Umgekehrt: Ist $H\in M_n(\mathbb{C})$ mit ${}^t\overline{H}=H$ so wird durch

$$\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n,\quad (x,y)\to{}^t xH\overline{y}$$

eine hermitesche Form mit der Darstellungsmatrix H definiert.

Sei $H=(h_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$

$$\operatorname{Re}H=(\operatorname{Re}h_{ij})\in M_n(\mathbb{R})\subset M_n(\mathbb{C})$$

$$\operatorname{Im}H=(\operatorname{Im}h_{ij})\in M_n(\mathbb{R})\subset M_n(\mathbb{C})$$

$$\Rightarrow H=\operatorname{Re}H+i\operatorname{Im}H$$

H hermitesch $\Leftrightarrow \underbrace{{}^t\overline{(\operatorname{Re}H+i\operatorname{Im}H)}}_{{}^t(\operatorname{Re}H)-i\,{}^t(\operatorname{Im}H)}=\operatorname{Re}H+i\operatorname{Im}H$

$$\Leftrightarrow {}^t(\operatorname{Re}H)=\operatorname{Re}H,\quad -{}^t(\operatorname{Im}H)=\operatorname{Im}H$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} \operatorname{Re} H & \text{symmetrisch} \\ \operatorname{Im} H & \text{alternierend} \end{array}\right\} \text{ insbesondere sind Diagonaleinträge} \in \mathbb{R}$$

d.h. h_{ii} ist reell

Bemerkung: Die hermiteschen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ bilden einen reellen Vektorraum der Dimension:

$$\underbrace{n}_{\#\text{ Diagonaleinträge}} + 2\underbrace{\left(1+2+\ldots+(n-1)\right)}_{\text{Real- \& Imaginärteil Oberhalb der Diagonalen}} = n + 2\cdot\frac{1}{2}\left(n(n-1)\right) = n^2$$

Die hermiteschen Matrizen bilden keinen $\mathbb{C}$-Vektorraum, denn:

H hermitesch $\Rightarrow$ i.A. iH ist nicht hermitesch