Hermitesche Matrizen in $M_2(\mathbb{C})$

$$\overline{{}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow a,d \in \mathbb{R}, \quad c = \overline{b}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

Jede hermitesche Matrix in $M_2(\mathbb{C})$ ist von der Form:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix} \text{mit } a,c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

$$\dim\{M \in M_2(\mathbb{C}) | \text{hermitesch}\} = 2^2 = 4$$

Basis: $\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Satz 1: Polarisationsformel
Sei $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ hermitesch und $v, w \in \mathbb{V}$

$$\operatorname{Re} \varphi(v,w) = \frac{1}{2}\left(\varphi(v+w, v+w) - \varphi(v,v) - \varphi(w,w)\right)$$

Beweis:

$$\varphi(v+w, v+w) = \varphi(v,v) + \varphi(w,w) + \varphi(v,w) + \varphi(w,v)$$
$$= \varphi(v,v) + \varphi(w,w) + \underbrace{\varphi(v,w) + \overline{\varphi(v,w)}}_{2\operatorname{Re}\varphi(v,w)}$$

NR: $z = x + iy \qquad iz = ix - y$
$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$$\varphi(iv, w) = i\varphi(v,w)$$
$$\operatorname{Re}\varphi(iv,w) = \operatorname{Re}(i\varphi(v,w)) = -\operatorname{Im}\varphi(v,w)$$
$$\varphi(v,w) = \operatorname{Re}\varphi(v,w) + i\operatorname{Im}\varphi(v,w)$$
$$= \operatorname{Re}\varphi(v,w) - i\operatorname{Re}\varphi(iv,w)$$
$$= \frac{1}{2}\big[\varphi(v+w,v+w) - \varphi(v,v) - \varphi(w,w) -$$
$$-i\varphi(iv+w, iv+w) + i\varphi(iv,iv) + i\varphi(w,w)\big]$$

Weitere Vereinfachung möglich mittels:

$$\varphi(iv, iw) = i\varphi(v, iw) = \overbrace{i\overline{i}}^{1}\varphi(v,w) = \varphi(v,w)$$

Folgerung: Die Polarisationsformel ermöglicht es, die hermitesche Form φ durch ihre zugehörige quadratische Form $v \mapsto \varphi(v,v)$ darzustellen.

Koordinatentransformation bei hermiteschen Matrizen

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\text{Basiswechsel } C\times C} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$(x,y) \mapsto {}^t x H \overline{y}$$

$$(x',y') \mapsto (Cx',Cy') \mapsto {}^t\left(Cx'H\left(\overline{Cy'}\right)\right) = {}^t x'\left({}^tCH\overline{C}\right)\overline{y}'$$

$\Rightarrow$ neue Darstellungsmatrix: ${}^tCH\overline{C}$

Klar: mit H ist auch ${}^tCH\overline{C}$ hermitesch, denn:

$$\overline{{}^t\left({}^tCH\overline{C}\right)} = \overline{{}^t\overline{C}\,{}^tHC} = {}^tC\,{}^t\overline{H}\overline{C} = {}^tCH\overline{C}$$

Satz 2: Diagonalisierung hermitescher Formen

Ist φ eine hermitesche Form auf einen endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{V}$, so gibt es eine Basis $v_1,\dots,v_n$ bzgl. welcher

$$\left(\varphi\left(v_i,v_j\right)\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ die Darstellungsmatrix von φ ist.

Beweis: Mit Induktion über $n = \dim \mathbb{V}$

$n = 1$

$$H = (h) \in M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C},\quad A = \left(\frac{1}{\sqrt{|h|}}\right) \in \mathbb{R}, \text{ falls } h \neq 0$$

$$\Rightarrow {}^tAH\overline{A} = \left(\frac{h}{|h|}\right) = (\pm 1)$$

$n-1 \mapsto n$

Fall 1: $\varphi \equiv 0 \quad \Rightarrow$ passt

Fall 2: $\varphi \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V}$, so dass $\varphi(v,v) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi/\mathbb{C}v$ nicht ausgeartet

$\overset{\S 1 \text{ Satz } 4}{\Rightarrow} \mathbb{V} = \mathbb{C}v \oplus v^{\perp}$ bzgl φ

$\dim v^{\perp} = n-1 \Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow \varphi/v^{\perp}$ diagonalisierbar

D.h. es existiert eine Basis $v_2,\dots,v_n$ von $v^{\perp}$, so dass

$$\varphi\left(v_i,v_j\right) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ h_i & i = j \end{cases}$$

Sei $h_1 = \varphi(v,v)$

$\Rightarrow$ Darstellungsmatrix von φ bzgl. $v_1 = v, v_2,\dots,v_n$ ist:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & h_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_n \end{array}\right) \Rightarrow \text{Behauptung, dass } H \text{ diagonalisierbar ist.}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA): $h_1,\dots,h_r>0, h_{r+1},\dots,h_{r+s}<0, h_{r+s+1},\dots,h_n=0$

$$\text{Sei } A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|h|}} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{|h_{r+s}|}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow {}^tA\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix}\overline{A}=\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei H bzw. φ hermitesche Matrix bzw. Form mit Darstellungsmatrix H und

${}^tAH\overline{A}=\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ für ein $A\in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$

Definition: Das Paar (r,s) heißt Signatur von H bzw. φ

Die hermitesche Matrix H bzw. Form φ heißt

- positiv definit $\Leftrightarrow r=n \Leftrightarrow {}^tvH\overline{v}>0 \quad \forall v\neq 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow s=n \Leftrightarrow {}^tvH\overline{v}<0 \quad \forall v\neq 0$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow s=0 \Leftrightarrow {}^tvH\overline{v}\geq 0 \quad \forall v$
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow r=0 \Leftrightarrow {}^tvH\overline{v}\leq 0 \quad \forall v$
- indefinit $\Leftrightarrow r>0$ und $s>0$

§7 Die unitäre Gruppe

Standardform nichtausgearteter hermitescher Formen.

$$H_{r,s}=\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$$

d.h. $\varphi:\mathbb{C}^{r+s}\times\mathbb{C}^{r+s}\to\mathbb{C},\quad (x,y)\mapsto {}^txH_{r,s}\overline{y}$

Definition: Eine lineare Abbildung $M:\mathbb{C}^{r+s}\to\mathbb{C}^{r+s}$ mit $\varphi(Mx,My)=\varphi(x,y)$ für alle $x,y\in\mathbb{C}^{r+s}$ heißt **unitär**.

Ist M unitär $\Rightarrow \quad {}^tMH_{r,s}\overline{M}=H_{r,s}$

Die unitäre Gruppe der Signatur (r,s) ist die Gruppe all dieser unitären Transformationen:

$$U_{r,s}=\left\{M\in \mathrm{Gl}_{r+s}(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^tM\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}\overline{M}=\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}\right\}=$$

$$= \left\{ M \in \mathrm{Gl}_{r+s}(\mathbb{C}) \middle| M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} {}^t\overline{M} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \right\}$$

Klar: $U_{r,s} \cap M_{r+s}(\mathbb{R}) = O_{r,s}$

Proposition 1:

Für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{r+s}(\mathbb{C})$ mit $A \in M_r(\mathbb{C}),\ \ D \in M_s(\mathbb{C}),$

$B, {}^tC \in M(r \times s, \mathbb{C})$ sind äquivalent:

1) $M \in U_{r,s}$

2) ${}^t\overline{M} \in U_{r,s}$

3) ${}^tA\overline{A} - {}^tC\overline{C} = \mathbb{1}_r,\quad {}^tB\overline{B} - {}^tD\overline{D} = -\mathbb{1}_s,\quad {}^tA\overline{B} = {}^tC\overline{D}$

Beweis: $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \in U_{r,s}$

1) $M \in U_{r,s} \Leftrightarrow M^{-1} \in U_{r,s} \Leftrightarrow {}^t\overline{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \in U_{r,s} \Leftrightarrow 2)$ $\square$

Sei $M \in U_{r,s}$

$$\Rightarrow {}^tM \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix} \overline{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det M \cdot \det \overline{M}}_{|\det M|^2} = 1 \qquad (\text{da} \det \overline{M} = \overline{\det M}\ )$$

$$\Rightarrow |\det M| = 1$$

Die spezielle unitäre Gruppe

$$SU_{r,s} = \left\{ M \in U_{r,s} \middle| \det M = \pm 1 \right\}$$

Spezialfall: $s = 0, r = n$

Die Form $\langle .,. \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\quad (x, y) \mapsto {}^tx\overline{y}$ ist

das Standard- (hermitesche) Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$\langle .,. \rangle$ ist positiv definit!

Definition: Eine Lineare Abbildung (Automorphismus, Matrix)

$M : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ heißt **unitär**, wenn

$$\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

$$\Leftrightarrow {}^tM\overline{M} = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow M^{-1} = {}^t\overline{M}$$

Die unitäre Gruppe dazu ist:

$$U_n := \left\{ M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \middle| {}^tM\overline{M} = \mathbb{1} \right\}$$

§ 8 Innere Produkte

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathbb{V} = \mathbb{K}$-Vektorraum
Ein inneres Produkt (skalare Produkt) auf $\mathbb{V}$ ist eine Abbildung $\sigma : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ welche:

1) im ersten Argument $\mathbb{K}$-linear ist
$\sigma(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \sigma(x_1, y) + \alpha_2 \sigma(x_2, y)$
2) hermitesch symmetrisch ist
$\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)} \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$
3) positiv definit ist
$\sigma(x, y) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{V}, \quad x \neq 0$

Bemerkung: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann bedeutet 2) Symmetrie: $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

Beispiele:

a) euklidisches Skalarprodukt
$\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle = {}^t x y$

b) hermitesches Skalarprodukt
$\langle .,. \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad \langle x, y \rangle = {}^t x \overline{y}$

c) $\mathcal{C}[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ stetig} \} = \mathbb{C}$-Vektorraum

$$\left.\begin{array}{l} \langle .,. \rangle : \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{C} \\ \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \end{array}\right\} \text{ist inneres Produkt}$$