

Innere Produkte:

Standardbeispiele: $\mathbb{R} : \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\langle x, y \rangle = {}^t x \cdot 1 \cdot y$
 $\mathbb{C} : \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$
 $\langle x, y \rangle = {}^t x \bar{y} = {}^t x \cdot 1 \cdot \bar{y}$

Ist $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} < \infty$ und $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ inneres Produkt.

Nach dem Satz über die Diagonalisierung hermitescher Formen §6 Satz 2 gibt es eine Basis v_1, \dots, v_n von \mathbb{V} , so dass die Darstellungsmatrix von g die Einheitsmatrix ist, denn σ ist positiv definit, d.h.

$$\sigma(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

Identifizieren wir $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}$
 $e_i \mapsto v_i$

so wird aus σ das Standardskalarprodukt des \mathbb{K}^n .

$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{V} \times \mathbb{V} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{K}$$

$$(e_i, e_j) \mapsto (v_i, v_j) \rightarrow \delta_{ij}$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = {}^t x \bar{y} = \langle x, y \rangle$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

Folgerung: Ein inneres Produkt auf einen endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum ist die koordinatenfrei (basisfreie) Version des euklidischen bzw. hermiteschen Skalarprodukts.

Ist σ inneres Produkt auf \mathbb{V} , so definiert man die zugehörige Norm:

$$\|\cdot\|_{\sigma} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|v\|_{\sigma} : \sqrt{\underbrace{\sigma(v, v)}_{\text{positive reelle Zahl}}}$$

Dann gilt:

- a) $\|c \cdot v\|_{\sigma} = |c| \|v\|_{\sigma}$
- b) $\|v\|_{\sigma} \geq 0$
- c) $\|v\|_{\sigma} = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- d) $|\sigma(v, w)| \leq \|v\|_{\sigma} \cdot \|w\|_{\sigma}$ - Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung
- e) $\|v + w\|_{\sigma} \leq \|v\|_{\sigma} + \|w\|_{\sigma}$ - Dreiecksungleichung

Bezeichnungen:

- euklidischer Raum $(v, \sigma) = \mathbb{R}$ -Vektorraum \mathbb{V} mit innerem Produkt σ
- unitärer Raum $(v, \sigma) = \mathbb{C}$ -Vektorraum \mathbb{V} mit innerem Produkt σ
- Metrik = Abstandsfunktion (z.B. $(x, y) \mapsto \|x - y\|_\sigma$)
- Isometrie = lineare Abbildung, welche σ enthält
 - § Orthogonale Abbildungen = Isometrie für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow O_n(\mathbb{R})$
 - § Unitäre Abbildung = Isometrie für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^n \Rightarrow U_n(\mathbb{C})$
- Orthogonalsystem = Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit $\sigma(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- Orthonormalsystem = Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit $\sigma(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j$

Proposition 1: Ein Orthonormalsystem ist immer linear unabhängig.

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalsystem

Annahme: $\sum_{i=1}^k c_i v_i = 0$

$$0 = \sigma\left(\left(\sum_{i=1}^k c_i v_i\right), v_j\right) = \sum_{i=1}^k c_i \underbrace{\sigma(v_i, v_j)}_{\delta_{ij}} = c_j \quad \square$$

Satz 2: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalsystem, dann ist jeder Vektor v aus $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ eine endliche Linearkombination der v_i der Form

$$v = \sum_{\text{endlich}} \sigma(v, v_i) v_i$$

Beweis: Nach Definition gilt: $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{\text{endlich}} c_i v_i \right\}$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^k c_i v_i \Rightarrow c_j = c_j \cdot \sigma(v_j, v_i) = \sum_{i=1}^k c_i \overbrace{\sigma(v_i, v_j)}^{\delta_{ij}} = \sigma\left(\left(\sum_{i=1}^k c_i v_i\right), v_j\right) = \sigma(v, v_j) \quad \square$$

Bemerkung: Proposition 1 gilt auch für Orthogonalsystem, wenn $\text{char } \mathbb{K} = 0$, z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 $c \cdot d = 0, \quad d \neq 0 \Rightarrow c = 0$

Satz 3: Sei \mathbb{V} ein \mathbb{K} -Vektorraum mit innerem Produkt σ
 Für jeden endlich-dimensionalen Untervektorraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ gilt:
 $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^\perp$

Beweis: Da $\sigma > 0 \Rightarrow \sigma/\mathbb{U} = 0 \Rightarrow \sigma/\mathbb{U}$ nicht ausgeartet
 \Rightarrow Wende §1 Satz 4 an \Rightarrow Behauptung

Neuer Beweis: $(\mathbb{U}, \sigma/\mathbb{U})$ endlich-dimensionaler unitärer Raum

$$\Rightarrow \exists \text{ ONB: } u_1, \dots, u_r$$

$$\text{Sei } v \in \mathbb{V} \Rightarrow v_i = \sum_{i=1}^r \sigma(v, u_i) u_i \in \mathbb{U}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma(v - v_0, u_k) &= \sigma(v, u_k) - \sigma(v_0, u_k) \\ &= \sigma(v, u_k) - \sum_{i=1}^r \sigma(v, u_i) \cdot \underbrace{\sigma(u_i, u_k)}_{\delta_{ik}} \\ &= \sigma(v, u_k) - \sigma(v, u_k) = 0 \end{aligned}$$

Das gilt für $k = 1, \dots, r$

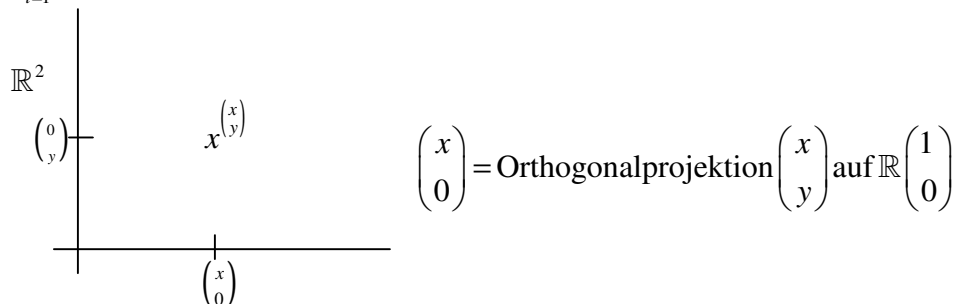
$$\Rightarrow \sigma(v - v_0, u) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

$$\Rightarrow v - v_0 \in \mathbb{U}^\perp$$

$$v = \underbrace{v_0}_{\in \mathbb{U}} + \underbrace{(v - v_0)}_{\in \mathbb{U}^\perp}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{U} + \mathbb{U}^\perp \quad \square$$

Bemerkung: $v_0 = \sum_{i=1}^r \sigma(v, u_i) u_i \in \mathbb{U}$ ist orthogonalprojektion von v auf \mathbb{U} .

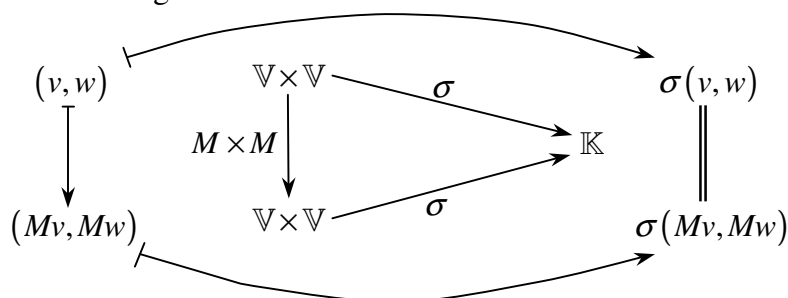


§ 9 Adjungierte Operatoren

Wiederholung: (\mathbb{V}, σ) \mathbb{K} -Vektorraum mit innerem Produkt

$$M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \text{ Isometrie, d.h. } \sigma(Mx, My) = \sigma(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

Als Diagramm



Schreibe $\sigma(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ als inneres Produkt

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Birkenhake

Sommersemester 2004

Vorlesung 9

Dienstag, 18. Mai 2004

Definition: Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ \mathbb{K} -Vektorraum mit inneren Produkten

Sei $M : V \rightarrow W$ lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung $M^* : W \rightarrow V$ heißt **adjungiert** zu M , wenn:

$$\langle M(v), w \rangle_W = \langle v, M^*w \rangle_V \quad \forall v \in V, w \in W$$

Bezeichnung: M^* ist die Adjungierte (zu M)

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{M \times \text{id}_W} & W \times W \\ \text{id}_V \times M^* \downarrow & & \downarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_W \\ V \times V & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_V} & \mathbb{K} \end{array}$$

Beispiele: 1) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$

$$M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

$$\langle Mx, y \rangle_m = {}^t(Mx)y = {}^tx({}^tMy) = \langle x, {}^tMy \rangle_n$$

$$\Rightarrow {}^tM : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist Adjungierte } M^* = {}^tM$$

2) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n), (W, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{C}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$

$$M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$$

$$\langle Mx, y \rangle_m = {}^t(Mx)\bar{y} = {}^tx({}^tMy) = {}^tx({}^t\bar{M}y) = \langle x, {}^t\bar{M}y \rangle_n$$

$$\Rightarrow {}^t\bar{M} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ ist adjungiert zu } M, M^* = {}^t\bar{M}$$

- Satz 1:**
- a) Die adjungierte Abbildung M^* einer linearen Abbildung $M : V \rightarrow W$ ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt
 - b) Sind V, W endlich dimensioniert, so existiert zu jeder linearen Abbildung M eine Adjungierte
 - c) Ist M^* adjungiert zu M , so ist auch M adjungiert zu M^* , d.h. $M^{**} = M$

Beweis: a) Sei $M : V \rightarrow W$ und $M^*, M^+ : W \rightarrow V$ Adjungierte zu M

$$\Rightarrow \forall v \in V, w \in W : \langle v, M^*w \rangle = \langle Mv, w \rangle = \langle v, M^+w \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle v, M^*w - M^+w \rangle = 0 \quad \forall v, w$$

$$\Leftrightarrow \langle v, (M^* - M^+)w \rangle = 0 \quad \forall v, w$$

$$\Leftrightarrow (M^* - M^+)w = 0 \quad \forall w \in W$$

$$\Leftrightarrow M^* = M^+ \quad \Rightarrow \text{a)}$$

- b) $\dim \mathbb{V} < \infty, \dim \mathbb{W} < \infty$
 $\Rightarrow \exists$ ONB von \mathbb{V} und \mathbb{W} bzgl. Welcher gilt:
 $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_v) \simeq (\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$
 $(\mathbb{W}, \langle \cdot, \cdot \rangle_w) \simeq (\mathbb{K}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$
 $\Rightarrow M^* = \begin{cases} {}^t M & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ {}^t \bar{M} & \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$
- c) Definition von $M^* : \langle Mv, w \rangle = \langle v, M^* w \rangle \quad \forall v, w$
Definition von $M^{**} : \langle M^* w, v \rangle = \langle w, M^{**} v \rangle \quad \forall v, w$

Hier fehlen noch einige Zeilen (sind dann in der verbesserten Version drin).