Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Sommersemester 2004

Definitionen

Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Bilinearform** auf $\mathbb{V}$ ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{K},\quad (v,w)\mapsto\varphi(v,w)$

die in beiden Argumenten (v und w) $\mathbb{K}$-linear ist.

D.h. für $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{V},\quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{K}$

$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1\varphi(v_1,w) + \alpha_2\varphi(v_2,w)$

$\varphi(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1\varphi(v,w_1) + \beta_2\varphi(v,w_2)$

Definition: Der Rang einer Bilinearform φ ist der Rang einer Darstellungsmatrix für φ

$\operatorname{Rg}\varphi = \operatorname{Rg} B$

Definition: Eine Bilinearform φ heißt nicht-entartet (nicht-ausgeartet), wenn $\mathbb{V}^\perp = \{0\}$. Das ist äquivalent zu:

$\Leftrightarrow$ für alle $v\in\mathbb{V}$ $(v\neq 0)$ gibt es ein $w\in\mathbb{V}$ mit $\varphi(v,w)\neq 0$

$\Leftrightarrow$ aus $\varphi(v,w)=0$ für alle $w\in\mathbb{V}\Rightarrow v=0$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rg}\varphi = n = \dim\mathbb{V}$

Definition: Eine Bilinearform φ auf $\mathbb{V}$ heißt:

- symmetrisch, wenn $\varphi(v,w)=\varphi(w,v)\quad \forall v,w\in\mathbb{V}$
- alternierend, wenn $\varphi(v,w)=-\varphi(w,v)\quad \forall v,w\in\mathbb{V}$

Definition: Eine symmetrische Bilinearform φ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{V}$ heißt

positiv definit,	falls $\varphi(v,v)=q_\varphi(v)>0$	$\forall 0\neq v\in\mathbb{V}$
positiv semidefinit,	falls $\varphi(v,v)=q_\varphi(v)\geq 0$	$\forall v\in\mathbb{V}$
negativ definit,	falls $\varphi(v,v)<0$	$\forall 0\neq v\in\mathbb{V}$
negativ semidefinit,	falls $\varphi(v,v)\leq 0$	$\forall v\in\mathbb{V}$
indefinit,	falls sonst	

Definition: $O_{r,s} = O_{r,s}(\mathbb{R}) = \left\{ M\in \operatorname{Gl}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tM\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s\end{pmatrix}M = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s\end{pmatrix}\right\}$

Orthogonale Gruppe vom Index (r,s)

Definition: $\operatorname{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ M\in \operatorname{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tM\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\right\}$

heißt **symplektische Gruppe**.

Definition: Das Paar (r,s) heißt Signatur von H bzw. φ

Die hermitesche Matrix H bzw. Form φ heißt

- positiv definit $\Leftrightarrow r=n \Leftrightarrow {}^tvH\bar{v}>0\quad\forall v\neq 0$

- negativ definit $\Leftrightarrow s = n \Leftrightarrow {}^t v H \bar{v} < 0 \quad \forall v \neq 0$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow s = 0 \Leftrightarrow {}^t v H \bar{v} \geq 0 \quad \forall v$
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow {}^t v H \bar{v} \leq 0 \quad \forall v$
- indefinit $\Leftrightarrow r > 0$ und $s > 0$

Definition: Eine lineare Abbildung $M : \mathbb{C}^{r+s} \to \mathbb{C}^{r+s}$ mit $\varphi(Mx, My) = \varphi(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^{r+s}$ heißt **unitär**.

Definition: Eine Lineare Abbildung (Automorphismus, Matrix) $M : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ heißt **unitär**, wenn

$$\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

$$\Leftrightarrow {}^t M \bar{M} = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow M^{-1} = {}^t \bar{M}$$

Die unitäre Gruppe dazu ist:

$$U_n := \left\{ M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t M \bar{M} = \mathbb{1} \right\}$$

Definition: Seien $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle_v)$ und $(\mathbb{W}, \langle .,. \rangle_w)$ $\mathbb{K}$ - Vektorräume mit inneren Produkten
Sei $M : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineare Abbildung
Eine lineare Abbildung $M^* : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ heißt **adjungiert** zu *M*, wenn:

$$\langle M(v), w \rangle_w = \langle v, M^*(w) \rangle_v \qquad \forall v \in \mathbb{V}, w \in \mathbb{W}$$

Bezeichnung : M^* ist die Adjungierte (zu *M*)

Definition: Eine **affine Abbildung** des $\mathbb{K}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad F(x) = Cx + t, \qquad C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}), \ t \in \mathbb{K}^n$$

$t =$ **Translationsvektor** der affinen Abbildung *F*
2 Quadriken Q_1 und Q_2 in $\mathbb{K}^n$ heißen **äquivalent**,
wenn sie sich um eine affine Abbildung *F* unterscheiden $Q_2 = F(Q_1)$

Definition: Ein **affiner Unterraum** $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ der Form

$$\mathcal{A} = U + w$$

mit einem $w \in \mathbb{R}^n$ und einem UVR $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definition: Die **Dimension eines affinen Unterraums** $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ ist die Dimension des eindeutig bestimmten zu $\mathcal{A}$ gehörigen UVR $\mathbb{U}$.

$$\mathcal{A} = w + \mathbb{U} \quad \Rightarrow \dim \mathcal{A} = \dim \mathbb{U}$$

Definition: Eine **Affinkombination** von Vektoren $v_0, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ ist eine Summe der Form

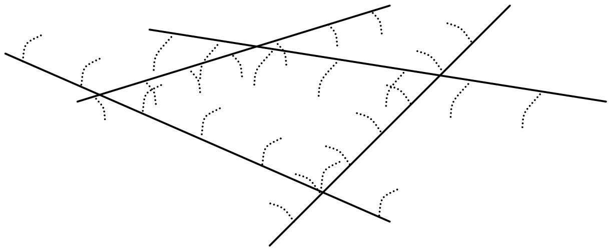
$$\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_r v_r \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_r = 1$$

Für eine beliebige Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ wird die Menge aller Affinkombinationen von Vektoren aus *M* die **Affine Hülle** von *M* genannt.
Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ und *A* die Affine Hülle von *M*

$$\Rightarrow A \subset \operatorname{span} M$$

Definition: Die Vektoren/Punkte $w_0,\dots,w_r$ heißen **affin unabhängig**, wenn $w_1-w_0,\dots,w_r-w_0$ linear unabhängig.

Definition: Ein **Polyeder** ist der **Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbebenen**
Es gibt **beschränkte** und **unbeschränkte Polyeder**.



Folgerung: Ein **Polyeder** ist die **Lösungsmengen** endlich vieler **linearer Ungleichungen**.

$$P=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle a_1,x\rangle\geq b_1,\dots,\langle a_k,x\rangle\geq b_k\right\}$$

$$=\bigcap_{i=1}^{k}\left\{\langle a_i,x\rangle\geq b_i\right\} \qquad a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}^n,\; b_1,\dots,b_k\in\mathbb{R}\;\left(\text{Œ}\,"\geq"\right)$$

Definition: Die Dimension eines Polyeders P ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der P enthält.

Definition: Seien $p_0,\dots,p_k$ $(k+1)-$affin unabhängige Punkte im $\mathbb{R}^n$.
Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}\left(p_0,p_1,\dots,p_k\right)$ heißt **Simplex** der Dimension k.

Definition: Sei $P=\left\{\langle a_i,x\rangle\geq b_i, i=1,\dots,k\right\}$ ein Polyeder und $\left\{i_i,\dots,i_r\right\}\subset\left\{1,\dots,k\right\}$ eine beliebige Teilmenge $\neq 0$.
Dann heißt das Polyeder $P_1\left\{\left\langle a_{i_j},x\right\rangle=b_{i_j},\; j=1,\dots,r\right\}$ eine **Seite von *P***,
1-dimensionale Seiten heißen auch **Kanten**.
0-dimensionale Seiten heißen auch **Ecken**.

*(Satz 1: Sei $\varnothing\neq P\subset\mathbb{R}^n$ ein beschränktes Polyeder und $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ linear.
Dann gibt es eine Ecke $p\in P$, in dem f das Maximum seiner Werte (in P) annimmt:*

$$f(x)\leq f(p)\quad\forall x\in P$$

)

Definition: Die Ecke p aus Satz 1 heißt **optimale Ecke** für die Linearform f.

Definition: Eine Basislösung x heißt **zulässig**, wenn $x_j\geq 0\quad\forall j=1,\dots,n$